Exercice 1

Dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; −1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; −2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

Correction

La droite (CD) passe par le point $C(0;\ 3;\ 2)$ et est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$

On en déduit donc une représentation paramétrique de la droite :

$$\boxed{\begin{cases} x = 0+4t \\ y = 3 \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2-4t \end{cases}}$$

2. Soit M un point de la droite (CD).
   (a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

Correction

On utilise donc un point de la droite (CD) dont nous venons de trouver une représentation paramétrique.

On en déduit donc que $BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + \left(y_M - y_B\right)^2 + (z_M - z_B)^2}$
$BM = \sqrt{(4t-4)^2 + (3+1)^2 + (2-4t)^2}$
$BM = \sqrt{16t^2 - 32t + 16 + 16 + 4 - 16t + 16t^2}$
$BM = \sqrt{32t^2 - 48t + 36}$

On en déduit donc que $BM^2 = 32t^2 - 48t + 36$, dérivons donc cette fonction de t et nous obtenons $64t - 48$ qui est égale à 0 pour $t = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$, qui est évidemment un minimum...
Or pour cette valeur de t on obtient les coordonnées suivantes $M(3;\ 3;\ -1)$
Finalement les coordonnées du point qui minimise la distance BM

$$\boxed{\text{sont } M(3;\ 3;\ -1)}$$

   (b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; −1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On calcule donc le produit scalaire $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} = -1\times4+4\times0+(-1)\times(-4) =$
$-4+0+4=0$
On en déduit donc que

$$\boxed{\text{les droites } (BH) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires}}$$

puisque le produit scalaire des vecteurs qui les dirigent est nul.

   (c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $12\ cm^2$.

Correction

On veint de voir que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires, donc le point H est le peid de la hauteur issue de B dans le triangle BCD, on déduit donc que l'aire du triangle BCD se calcule par

$$\mathscr{A} = \frac{Base \times Hauteur}{2} = \frac{CD \times BH}{2}$$

Or $CD = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ et $BH = \sqrt{1^2+4^2+1^2} = sqrt18 = 3\sqrt{2}$
Finalement

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{CD \times BH}{2} = \frac{4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2} = 12\ cm^2}$$

3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

Correction

On calcule donc :

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix} = 2\times 4 + 1\times 0 + 2\times(-4) = 0$

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix} = 2\times(-4) + 1\times 4 + 2\times 2 = 0$

Ainsi

$$\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan } (BCD)}$$

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

Correction

On a donc une équation cartésienne pour le plan de la forme $2x+y+2z+d=0$
On détermine alors d en remplaçant B dans l'équation ce qui donne $8-1+d=0$ soit $d=-7$.
Ainsi

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne du plan est donc } 2x+y+2z-7=0}$$

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

Correction

Puisque othogonale au plan (BCD) cette droite est donc dirigée par un vecteur normal à ce plan, c'est-à-dire $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et de plus elle passe par $A(2\ ;\ 1\ ;\ 4)$ on en déduit une représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 4+2t \end{cases}}$$

(d) Démontrer que le point$I$, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.

Correction

Il nous sufiit de vérifier que le point annocé est bien sur les deux objets, c'est-à-dire vérifie les équations de la droite et du plan.

Pour le plan on a bien $2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+2\times\frac{8}{3}-7=\frac{4+1+16}{3}-7=0$

Pour la droite on remarque qu'en choisissant $t=-\frac{2}{3}$ on obtient $x=2+2t=2+2\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$ et $y=1+t=1+\frac{-2}{3}=\frac{1}{3}$ et $z=4+2t=4+2\frac{-2}{3}=\frac{8}{3}$

I est bien sur Δ et sur le plan (BCD)

4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Correction

D'après les questions précédentes nous savons déjà que l'aire de « la »base de cette pyramide est de 12 cm^2 et qu'en outre Δ est perpendiculaire à (BCD) et coupe (BCD) en I, ainsi on en déduit que $[IA]$ est la hauteur issue du sommet A à cette pyramide.

On calcule donc $IA=\sqrt{\left(2-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(4-\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=2$

$$\mathcal{V}=\frac{12\times 2}{3}=8\ cm^3$$