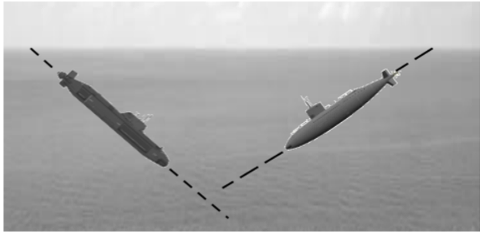
Exercice 1 2018 Liban Exo3



L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.
On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ dont l'unité est le mètre.
Le plan défini par $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geqslant 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 140-60t \\ y(t) & = & 105-90t \\ z(t) & = & -170-30t \end{array}\right.$$

(a) Donner les coordonnées du sous- marin au début de l'observation.

Correction

Le début nous dit donc que $t=0$ (le début), cela nous donne les coordonnées suivantes :

$$\boxed{(140;\ 105;\ -170)}$$

(b) Quelle est la vitesse du sous-marin ?

Correction

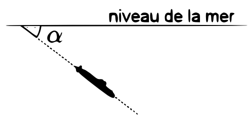
Le vecteur directeur de la droite est le vecteur vitesse. Donc la vitesse du sous-marin est la norme du vecteur directeur de la doite.
On a donc :

$$\left|\left|\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix}\right|\right| = \sqrt{(-60)^2+(-90)^2+(-30)^2} = \sqrt{3600+8100+900} = \sqrt{12600} \approx 112\ m\ min^{-1}$$

$$\boxed{\text{La vitesse du sous-marin est donc de } 112\ m\ min^{-1}}$$

(c) On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à $0,1$ degré près.



Correction

L'éoncé nous dit de se placer dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin. Il nous faut donc trouver les coordonnées d'un vecteur "à la surface" dans ce plan.
Bien évidemment un tel vecteur sera colinéaire à la projection du vecteur de la droite représentant le déplacement du premier sous-marin sur le plan de la surface. On choisit donc :

$\vec{u} = \begin{pmatrix}-60\\-90\\0\end{pmatrix}$, on calcule donc :

$$\begin{pmatrix}-60\\-90\\-30\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-60\\-90\\0\end{pmatrix} = -60\times(-60)+(-90)\times(-90)+(-30)\times 0 = 3600+8100 = 11700$$

De plus $\vec{u} \bullet \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} = || \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix} || \times || \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix} || \times \cos(\alpha) =$
$= \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (-30)^2} \times \sqrt{(-60)^2 + (-90)^2 + (0)^2} \times \cos(\alpha) =$
$= \sqrt{12600} \times \sqrt{11700} \times \cos(\alpha)$
Finalement on obtient :
$\cos(\alpha) = \dfrac{11700}{\sqrt{12600} \times \sqrt{11700}} \approx 0.9636$
Finalement

$$\boxed{\alpha \approx \cos^{-1}(0.9636) \approx 15.5 \text{ en dégré}}$$

---

2. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$ et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées $(-202\ ;\ -405\ ;\ -248)$ avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

Correction

On obtient donc les équations paramétriques de S_2 après avoir trouvé un vecteur vitesse. Comme nous avons la position au temps 0 et au temps 3 on obtient les coordonnées du vecteur vitesse :
$\frac{1}{3}\overrightarrow{S_2(0)S_2(3)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -202-68 \\ -405-135 \\ -248+68 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$,
on obtient donc les équations parmétriques de la trajectoire de S_2 :

$$\begin{cases} x(t) & = & 68 - 90t \\ y(t) & = & 135 - 180t \\ z(t) & = & -68 - 60t \end{cases}$$

Finalement il nous faut résoudre l'équation :

$$-68 - 60t = -170 - 30t$$

$$\iff -30t = -102$$
$$\iff t = \frac{102}{30} = \frac{17}{5}$$
$$\iff t = 3.4\ min$$

$$\boxed{\text{Ce temps est donc de } 3.4 \text{ minutes}}$$
