Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5+2t' \\ y & = & -1+t' \\ z & = & 5 \end{array}\right. , t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point $A(2~;~3~;~0)$ appartient à la droite d_1.

Correction

Comme nous avons les équations de d_1 nous pouvons aisément le vérifier :
Il nous faut donc trouver un t qui conviennent et après mure réflexion on remarque qu'en choisissant $t = 0$ dans les équations paramétriques de d_1 on obtient les coordonnées de A.

Donc $A \in d_1$

2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

Correction

On a donc $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.
De plus ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, en effet la troisième coordonnée est nulle pour l'un non nulle pour l'autre ! Et donc ces deux droites ne sont pas parallèles.

Remarque.

Remarquons que l'énoncé nous annonçait que les deux droites n'étaient pas coplanaires donc elles ne pouvaient être parallèles.

3. Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1~;~-2~;~-3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Correction

On calcule donc les produits scalaires de ces vecteurs avec $\vec{v}$, on a :

$\overrightarrow{u_1}.\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = 1\times 1 + (-1)\times(-2) + 1\times(-3) = 1+2-3 = 0$ et

$\overrightarrow{u_2}.\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = 2\times 1 + 1\times(-2) + 0\times(-3) = 2-2 = 0$

Finalement :

Le vecteur $\vec{v}(1~;~-2~;~-3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$

4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.
   (a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.

   Correction

   Montrons que le vecteur $\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$ est bien normal au plan P en montrant qu'il est normal aux

deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ne sont pas colinéaires (c.f. question 3.). On a : $\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=5-4-1=0$ et $\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=5-8+3=0$ d'où le résultat.
De plus le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ vérifie bien l'équation cartésienne puisque $5\times2+4\times3-0-22=0$.
Finalement :

Une équation cartésienne du plan P est bien : $5x+4y-z-22=0$

(b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

Correction

Il suffit de voir que B est à la fois sur d_2 et sur P, donc que B vérifie les équations respectives de d_2 et de P.
Or en choisissant $t'=4$ dans les équations paramétriques de d_2 on obtient bien les coordonnées de B et de plus $5\times3+4\times3-5-22=0$

5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

(a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

Correction

Les équations paramétriques d'une droites sont construites à l'aide d'un point de cette droite et d'un vecteur directeur. On obtient donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t'' \\ y & = & 3-2t'' \\ z & = & 5-3t'' \end{array}\right.$$

(b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

Correction

Il nous faut donc trouver t et t'' tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2+t & = & 3+t'' \\ 3-t & = & 3-2t'' \\ t & = & 5-3t'' \end{array}\right. ,$$

Système qui est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2+t & = & 3+t'' \\ 3-t & = & 3-2t'' \\ t & = & 5-3t'' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2+5-3t'' & = & 3+t'' \\ 3-t & = & 3-2t'' \\ t & = & 5-3t'' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -4t'' & = & -4 \\ 3-t & = & 3-2t'' \\ t & = & 5-3t'' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t'' & = & 1 \\ 3-t & = & 3-2t'' \\ t & = & 2 \end{array}\right.$$

Or la solution $t=2$ et $t''=1$ est bien encore solution dans la deuxième équation, donc les deux droites sont bien sécantes. Il suffit maintenant de remplacer $t=2$ dans les équations paramétriques de d_1 pour trouver les coordonnées de l'intersection $C(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$

(c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Correction

Cette droite est bien sécante avec d_1 et d_2 au point C et B respectivement et elle est dirigé par $\overrightarrow{v}$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ donc elle est orthogonale à ces deux droites.