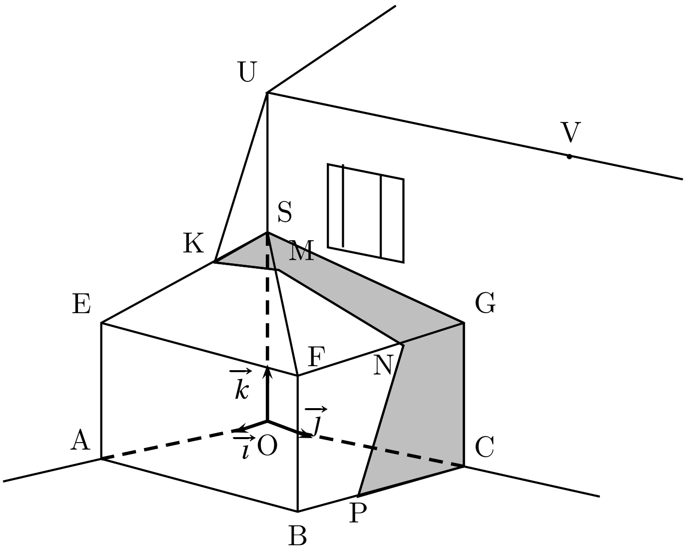
Exercice 1

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment $[SE]$, le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale $KMNP$ qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   (a) le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$;

   Correction

   C'est le théorème du toit. En effet les arêtes $[UV]$ et $[EF]$ des toits sont parallèles, donc le théorème du toit nous dit que l'intersection des plans (ESF) et (UKV) sont parallèles aux droites (UV) et (EF). En particulier le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$

   (b) le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.

   Correction

   les plans (SOA) et (GCB) étant parallèles les intersections de ces plans avec le plan (UKV) sont parallèles, donc le segment $[NP]$ est parallèle au segment $[UK]$.

2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : $A(4\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 5\ ;\ 0)$, $E(4\ ;\ 0\ ;\ 2{,}5)$, $F(4\ ;\ 5\ ;\ 2{,}5)$, $G(0\ ;\ 5\ ;\ 2{,}5)$, $S(0\ ;\ 0\ ;\ 3{,}5)$, $U(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $V(0\ ;\ 8\ ;\ 6)$.

   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UVK) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

   (a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse $1{,}2$. Vérifier que les coordonnées du point K sont $(1{,}2\ ;\ 0\ ;\ 3{,}2)$.

   Correction

   - $x_K = 1{,}2$ c'est une hypothèse de la question.
   - $y_K = 0$ puisque le point K est dans le plan (OAS).
   - $z_K =$? On note K_1 le point de coordonnées $(1{,}2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, les droites (EA), (KK_1) et (SO)

   sont donc parallèles. On en déduit donc que, comme $1{,}2\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OK_1}$, on a $4\overrightarrow{SK} = 1{,}2\overrightarrow{SE}$
   Cette égalité vectorielle se traduit sur « les z, par $4(z_K - 3{,}5) = 1{,}2(2{,}5 - 3{,}5)$ »
   Finalement :

$$4z_K = -1,2 + 14 \text{ et donc } z_K = \frac{12,8}{4} = 3,2$$

(b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(7\ ;\ 0\ ;\ 3)$ est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

Correction

Il suffit donc pour cela de montrer que $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs de (UKV), non colinéaires.

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}.\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} = 7\times 0 + 0\times 8 + 3\times 0 = 0$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}.\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1,2\\0\\-2,8\end{pmatrix} = 7\times 1,2 + 0\times 8 + 3\times(-2,8) = 8,4 - 8,4 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est bien un vecteur normal au plan (UKV).

On en déduit une équation cartésienne du plan (UKV) qui sera de la forme $7x+0y+3z+d=0$ en écrivant que le point $U(0\ ;\ 0\ ;\ 6)$ est sur le plan on trouve finalement :

$$7x+0y+3z-18=0$$

(c) Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

Correction

La droite (FG) est une droite dont les équations paramétriques sont simples puisque l'on a :

$$(FG)\begin{cases} x = t \\ y = 5, \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 2,5 \end{cases} \tag{1}$$

On en déduit que les coordonnées de l'intersection du plan et de la droite sont telles que $7x + 0\times 5 + 3\times 2,5 - 18 = 0$, soit $x = \dfrac{10,5}{7} = 1,5$

$$N(1,5\ ;\ 5\ ;\ 2,5)$$

(d) Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

Correction

On place le point K, on trace $[KM]$ parallèlement à $[FE]$, ce qui nous donne le point M, puis on place N, on trace $[MN]$, et enfin on trace la parallèle à (KU) passant par N pour obtenir le point P.

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Correction

Notons α l'angle de la pente. On a :

$\cos(\alpha) = \dfrac{OC}{SG} = \dfrac{5}{\sqrt{5^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$, on en déduit $\alpha \approx 11,3°$. La condition est donc bien remplie.