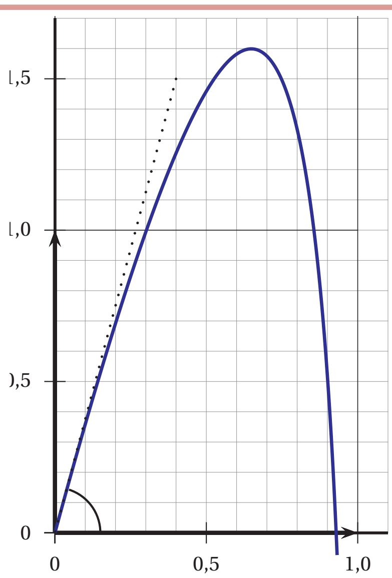
Exercice 1 2018 AmériqueNord Exo2

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$

   Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

Correction

Le cours nous dit que si f admet un maximum sur $]0\,;\,1[$ alors en ce maximum nous avons $f'(x)=0$

On en déduit que $\dfrac{-bx+b-2}{1-x} = 0$ et donc que $-bx+b-2=0$
On obtient donc que $x_{max} = \dfrac{b-2}{b}$
Et donc $y_{max} = f(x_{max}) = f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) = b\times\dfrac{b-2}{b} + 2\ln\left(1-\dfrac{b-2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(\dfrac{b}{b}-\dfrac{b-2}{b}\right) = b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$
On remarquera que $f(0)=0<f(1)=b$ puisque $b\geq 2$, on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que le maximum de la fonction sur $[0\,;\,1[$ ne peut être atteint en 0

$$\boxed{b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \text{ est bien la valeur maximale de } f \text{ sur } [0\,;\,1[}$$

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Correction

Nous devons résoudre l'équation :

$$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = 1.6$$

, équation que nous ne savons résoudre. Le théorème des valeurs intermédiaires arrive tout naturellement.
On pose donc la fonction $g(x) = x-2+2\ln\left(\dfrac{2}{x}\right) = x-2+2\ln(2)-2\ln(x)$ pour $x\geq 2$
Cette fonction est continue et dérivable et on a :

$$g'(x) = 1-\frac{2}{x}$$

qui est positive pour $x \geq 2$

De plus

- $g(2) = 0 < 1.6$
- $g(8) \approx 3.8 > 1.6$
- g est continue

le théorème des valeurs intéremédiaires nous donne l'existence d'une solution à cette équation et de plus comme la fonction est strictement croissante on en déduit que cette solution, notée α, est unique.

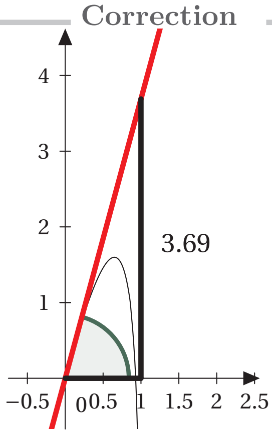
A l'aide d'une table dans la calculatrice on obtient $\alpha \approx 5.69$

Ainsi

La hauteur du projectile ne dépasse pas 1.6 m pour $b \in [2\ ;\ 5.69]$

3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.
   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Correction



La tangente est donc dirigée par le nombre dérivée en 0 qui est égal à $f'(0) = 3.69$. Elle a donc pour équation $y = 3.69x$ et donc passe par le point $(1\ ;\ 3.69)$. On en déduit que

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{3.69}{1}$$

On en déduit que $\theta = \tan^{-1}(3.69)$

$\theta \approx 74.8\ °$