

Exercice 1

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

- Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

Correction

Soyons fou, dérivons !

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right) \right)' = \\ &= 30 \frac{\left(\frac{20x}{1-x} \right)'}{\frac{20x}{1-x}} = \qquad \qquad \qquad , \text{ on utilise ici la formule suivante } (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= 30 \frac{\frac{1-x}{20 \times (1-x)} - (-1) \times 20x}{\frac{20x}{1-x}} = \qquad \qquad \qquad , \text{ on utilise ici la formule suivante } \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \\ &= 30 \frac{20}{\frac{(1-x)^2}{20x}} = \\ &= 30 \frac{(1-x)^2}{20x} = \\ &= 30 \frac{1-x}{20} \times \frac{1-x}{20x} = \frac{30}{x(1-x)} \end{aligned}$$

Finalement :

Comme $x \in]0 ; 1[$ on en déduit que x et $1-x$ sont strictement positives donc $f'(x)$ est strictement positive donc f est strictement croissante.

- Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Correction

Résolvons donc les inéquation suivante

$$20 \leq 30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right) \leq 120$$

On peut décider de couper les deux inéquation et de les résoudre l'une après l'autre ce qui semble plus facile.

Enfin comme la fonction est croissante, on vient de le démontrer, il suffit de résoudre les équations ce qui est un peu plus facile. $30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right) = 20$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right) &= \frac{20}{30} \\ \left(\frac{20x}{1-x} \right) &= e^{\frac{2}{3}} \\ 20x &= (1-x)e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

”Do. Or do not. There is no try.”, Yoda - Jedi Master - Star Wars

$$20x + xe^{\frac{2}{3}} = 1e^{\frac{2}{3}}$$
$$x(20 + e^{\frac{2}{3}}) = e^{\frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{(20 + e^{\frac{2}{3}})} \approx 0,089$$

arrondi par excés

De même on résout :

$$30 \ln \left(\frac{20x}{1-x} \right) = 120$$

$$x = \frac{e^4}{(20 + e^4)} \approx 0,731$$

arrondi par défaut

Finalement les conditions de validité sont :

$$0,089 \leq x \leq 0,731$$

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. (a) Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.

Correction

On a $\frac{18,05 - 15,6}{80 - 70} = 0,245$ ainsi 0,245 est la vitesse moyenne de croissance des arbres sur les dix dernières années exprimées en $m \cdot an^{-1}$. En d'autres termes sur les dix dernières années les arbres ont poussé de 0,245 mètres par an.

- (b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?

Correction

Il nous faut donc inscrire la formule suivante :

$$=(C2-B2)/(C1-B1)$$

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

Correction

On a $f(0,27) \approx 60$ donc un tel arbre a environ 60 ans.

Et 60 ans correspond à, d'après le tableau, 50 ans plus 10 ans, c'est-à-dire 11,2 mètres plus $0,22 \times 10$, soit 13,4 mètres.

Un épicéa dont le diamètre du tronc vaut 27 cm mesure environ 13,4 m.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

- (a) Déterminer un intervalle d’âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.

Correction

En finissant le tableau donné, on constate que la vitesse moyenne est maximal ($= 0,25\text{m.an}^{-1}$) entre 80 et 95 ans.

- (b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

Correction

A nouveau $f(0,7) \approx 115$ ans. Cela semble un peu tard par rapport aux résultats de la question précédente.
