Exercice 1

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathscr{C}_k$ pour différentes valeurs de k. Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathscr{C}_k$. Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.
Est-ce le cas ?

Correction

L'exercice peut paraître effrayant cependant laissons nous porter par la question. Comme souvent d'ailleurs en pareil cas. Que voulons-nous ? Démontrer que des points sont alignés. Il est donc légitime (naturel), puisque nous sommes dans un repère, de chercher les coordonnées de ces points.

Or où sont ces points ? Sur des courbes. En fait « sur le minimum de chacune des courbes ». Il nous faut donc trouver les coordonnées du minimum de chacune des courbes.

Comment trouver un minimum pour une courbe donnée ? On calcule la dérivée et on regarde où elle s'annule.

Voici donc le plan de bataille. Allons-y gaiement.

On rappelle que « k »est juste un paramètre, on le traite donc comme un nombre fixe, aucune inquiétude à avoir.

$f_k'(x) = (x + k\mathrm{e}^{-x})' =$
$= (x)' + (k\mathrm{e}^{-x})' =$
$= 1 + k(-x)'\mathrm{e}^{-x} =$
$= 1 - k\mathrm{e}^{-x}$

Or $f_k'(x) = 0 \iff 1 - k\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff k\mathrm{e}^{-x} = 1 \iff \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{k} \iff -x = \ln\left(\dfrac{1}{k}\right) \iff x = \ln(k)$

Finalement les coordonnées des points A_k sont :

$$A_k\big(\ln(k); f_k(\ln(k)\big) \quad \text{soit} \quad A_k\left(\ln(k); \ln(k) + k\mathrm{e}^{-\ln(k)}\right) \quad \text{ainsi} \quad A_k\big(\ln(k); \ln(k)+1\big)$$

Ces points sont-ils donc alignés ???

On pourrait évidement trouver deux vecteurs construits par trois points pris quelconque parmi la famille de points, puis vérifier la colinéarité de ces vecteurs mais foin de tout cela, regardons bien les coordonnées des A_k, ils sont évidemment sur la droite :

$$y = x + 1$$

Et donc ces points sont alignés !