Exercice 1

Une entreprise conditionne du sucre blanc provenant de deux exploitations U et V en paquets de 1 kg et de différentes qualités.

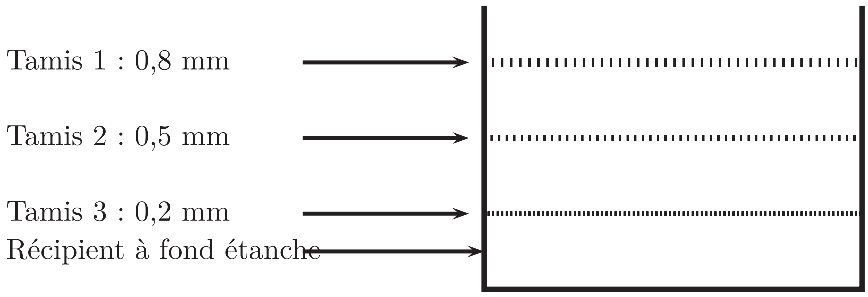
Le sucre extra fin est conditionné séparément dans des paquets portant le label « extra fin ».

Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

Pour calibrer le sucre en fonction de la taille de ses cristaux, on le fait passer au travers d'une série de trois tamis positionnés les uns au-dessus des autres et posés sur un récipient à fond étanche. Les ouvertures des mailles sont les suivantes :



Les cristaux de sucre dont la taille est inférieure à $0,2$ mm se trouvent dans le récipient à fond étanche à la fin du calibrage. Ils seront conditionnés dans des paquets portant le label « sucre extra fin ».

1. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation U. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{U} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{U}} = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma_{\text{U}} = 0,21$ mm.

   (a) Calculer les probabilités des évènements suivants : $X_{\text{U}} < 0,2$ et $0,5 \leqslant X_{\text{U}} < 0,8$.

   Correction

   On doit donc calculer $P(X_{\text{U}} < 0,2) = P(-\infty < X_{\text{U}} < 0,2) \approx P\left(-10^{99} < X_{\text{U}} < 0,2\right) = 0.035$, à la caculatrice bien sûr.

   De la même manière on obtient $P(0,5 \leqslant X_{\text{U}} < 0,8) \approx 0.501$, à la caculatrice bien sûr.

   $P(X_{\text{U}} < 0,2) \approx 0.035$ et $P(0,5 \leqslant X_{\text{U}} < 0,8) \approx 0.501$ arrondi au millième

   (b) On fait passer 1 800 grammes de sucre provenant de l'exploitation U au travers de la série de tamis.
   Déduire de la question précédente une estimation de la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche et une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2.

   Correction

   D'après la question précédente 3.5% du sucre se retrouve dans le récipient à fond étanche, soit $3.5 \times 1800 \times \dfrac{1}{100}$ et la moitié environ dans le tamis 2 soit

   Dans le fond étanche 63g et 901.8g dans le tamis 2

2. On prélève au hasard un cristal de sucre de l'exploitation V. La taille de ce cristal, exprimée en millimètre, est modélisée par la variable aléatoire X_{V} qui suit la loi normale de moyenne $\mu_{\text{V}} = 0,65$ mm et d'écart type σ_{V} à déterminer.
   Lors du calibrage d'une grande quantité de cristaux de sucre provenant de l'exploitation V, on constate que 40 % de ces cristaux se retrouvent dans le tamis 2.
   Quelle est la valeur de l'écart type σ_{V} de la variable aléatoire X_{V} ?

Correction

On a donc :

$P(0,5 \leqslant X_{\mathrm{V}} < 0,8) = 0.4$

Soit : $P\left(\dfrac{0,5-0.65}{\sigma_V} \leqslant \dfrac{X_{\mathrm{V}}-0.65}{\sigma_V} < \dfrac{0,8-0.65}{\sigma_V}\right) = 0.4$

Ainsi

$P\left(\dfrac{-0.15}{\sigma_V} \leqslant \mathcal{N}(0;1) < \dfrac{0.15}{\sigma_V}\right) = 0.4$

et encore

$P\left(\mathcal{N}(0;1) < \dfrac{0.15}{\sigma_V}\right) = 0.7$, d'où $\dfrac{0.15}{\sigma_V} \approx 0.5245$

On en déduit que $\sigma_V \approx 0.286$

$$\boxed{\sigma_V \approx 0.286}$$

Partie B

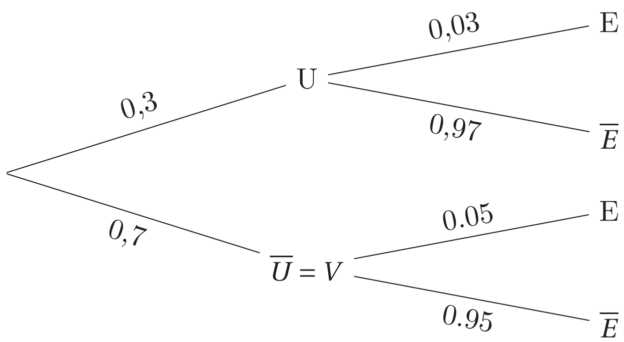
Dans cette partie, on admet que 3 % du sucre provenant de l'exploitation U est extra fin et que 5 % du sucre provenant de l'exploitation V est extra fin.
On prélève au hasard un paquet de sucre dans la production de l'entreprise et, dans un souci de traçabilité, on s'intéresse à la provenance de ce paquet.
On considère les évènements suivants :

- U : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U » ;
- V : « Le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V » ;
- E : « Le paquet porte le label "extra fin" ».

1. Dans cette question, on admet que l'entreprise fabrique 30 % de ses paquets avec du sucre provenant de l'exploitation U et les autres avec du sucre provenant de l'exploitation V, sans mélanger les sucres des deux exploitations.

   (a) Quelle est la probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » ?

   Correction



On en déduit donc par la formule des probabilités totales que :

$P(E) = P(E \cap U) + P(E \cap \overline{U}) = 0.3 \times 0.03 + 0.7 \times 0.05 = 0.044$

$$\boxed{P(E) = 0.044}$$

   (b) Sachant qu'un paquet porte le label « extra fin », quelle est la probabilité que le sucre qu'il contient provienne de l'exploitation U ?

Correction

La probabilité que l'on nous demande de calculer est donc :
$P_E(U) = \dfrac{P(E\cap U)}{P(E)} = \dfrac{0.3\times 0.03}{0.044} \approx 0.205$

$$\boxed{P_E(U) \approx 0.205}$$

2. L'entreprise souhaite modifier son approvisionnement auprès des deux exploitations afin que parmi les paquets portant le label « extra fin », 30 % d'entre eux contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

   Comment doit-elle s'approvisionner auprès des exploitations U et V ?

   Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

   Correction

   On note donc $P(U) = x$ et on refait les calculs. On obtient donc que :
   $P_E(U) = \dfrac{P(E\cap U)}{P(E)} = \dfrac{x\times 0.03}{x\times 0.03+(1-x)\times 0.05} = 0.3$

   Ainsi $0.03x = 0.3\,(0.03x+0.05-0.05x)$ et donc $0.03x = 0.009x+0.015-0.015x$

   Finalement $x = \dfrac{0.015}{0.036} \approx 0.417$

   $$\boxed{\text{Il faut donc que environ 42\% du sucre provienne de l'exploitation } U}$$

Partie C

1. L'entreprise annonce que 30 % des paquets de sucre portant le label «extra fin» qu'elle conditionne contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

   Avant de valider une commande, un acheteur veut vérifier cette proportion annoncée. Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets, 30 contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

   A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

   Correction

   On construit donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%, on obteint
   $I = [0.3-1.96\dfrac{\sqrt{0.3\times 0.7}}{\sqrt{150}};0.3+1.96\dfrac{\sqrt{0.3\times 0.7}}{\sqrt{150}}]$

   soit :

   $I = [0.226;0.374]$, or $f_n = \dfrac{30}{150} = 0.2$, on remarque donc que $f_n \notin I$

   $$\boxed{\text{On peut donc rejetter, à 95\%, l'annonce de l'entreprise.}}$$

2. L'année suivante, l'entreprise déclare avoir modifié sa production. L'acheteur souhaite estimer la nouvelle proportion de paquets de sucre provenant de l'exploitation U parmi les paquets portant le label « extra fin ».

   Il prélève 150 paquets pris au hasard dans la production de paquets labellisés « extra fin » de l'entreprise. Parmi ces paquets 42 % contiennent du sucre provenant de l'exploitation U.

   Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, de la nouvelle proportion de paquets labellisés « extra fin » contenant du sucre provenant de l'exploitation U.

Correction

On a donc l'intervalle de confiance au seuil 95% qui est, avec f la fréquence observée et n la taille de l'échantillon.

$$[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f - \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0.42 - \frac{1}{\sqrt{150}}; 0.42 - \frac{1}{\sqrt{150}}] = [0.338; 0.502]$$

Anisi donc l'intervalle de confiance demandé est $[0.338; 0.502]$