Exercice 1 2018 CentresEtrangers Exo3

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et $1\,200$ g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ». Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C. Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_A qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1200. La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_B qui suit une loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type inconnu σ. Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes. Déterminer x.

Correction

On sait que M_A suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\ ;\ x]$, on en déduit donc que :

$$P\left(a \le M_A \le b\right) = \frac{b-a}{x-850} \qquad \text{avec } a, b \in [850\ ;\ x]$$

Or nous savons que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes, on en déduit donc que :
$P\left(900 \le M_A \le 1200\right) = \dfrac{300}{x-850} = 0.75 \Longrightarrow 300 = 0.75(x-850) \Longrightarrow x = \dfrac{300+0.75\times 850}{0.75} = 1250$

$$\boxed{x = 1250}$$

2. Il constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes. Déterminer l'écart-type σ de la variable aléatoire M_B. En donner la valeur arrondie à l'unité.

Correction

On sait donc que $\dfrac{M_B - 1050}{\sigma} \sim \mathbb{N}(0\ ;1)$. On en déduit donc que :
$P\left(900 \le M_B \le 1200\right) = P\left(\dfrac{900-1050}{\sigma} \le \dfrac{M_B-1050}{\sigma} \le \dfrac{1200-1050}{\sigma}\right) = P\left(\dfrac{-150}{\sigma} \le \dfrac{M_B-1050}{\sigma} \le \dfrac{150}{\sigma}\right) = P\left(\dfrac{-150}{\sigma} \le \mathbb{N}\right.$

En utilisant la symétrie de la loi normale on obtient : $P\left(\dfrac{-150}{\sigma} \le \mathbb{N}(0\ ;1) \le \dfrac{150}{\sigma}\right) = 0.85 \Longrightarrow P\left(\mathbb{N}(0\ ;1) \le \dfrac{150}{\sigma}\right) =$
0.925

A l'aide de la calculatrice on obtient alors que :

$$\frac{150}{\sigma} = 1.4395$$

$$\boxed{\sigma = \frac{150}{1.4395} \approx 104}$$

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes. Le détaillant a-t-il raison de douter de l'affirmation du maraîcher C ?

Correction

- On a donc $p = 0.8$
- $n = 400$

- $f = \dfrac{294}{400} = 0.735$

On construit donc l'intervalle de fluctuation à 95 % :

$$[p - 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$$

et donc $I = [0.8 - 1.96\frac{\sqrt{0.8(1-0.8)}}{\sqrt{400}} \ ; \ 0.8 + 1.96\frac{\sqrt{0.8(1-0.8)}}{\sqrt{400}}] = [0.76 \ ; \ 0.84]$

Or $f = 0.735 \notin [0.76 \ ; \ 0.84]$, donc il a raison de douter de douter de C

Partie B

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

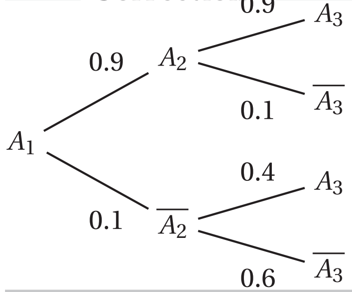
On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ». On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.

Correction

Voir arbre ci-contre

Correction



(b) Démontrer que $P(A_3) = 0,85$.

Correction

D'après la formule des probabilités totales on obtient :

$P(A_3) = P(A_3 \cap A_2) + P\left(A_3 \cap \overline{A_2}\right) = 0.9 \times 0.9 + 0.4 \times 0.1 = 0.81 + 0.04 = 0.85$

$P(A_3) = 0,85$

(c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

Arrondir au centième.

Correction

On doit donc calculer la probabilité suivante :

$P_{A_3}(A_2) = \dfrac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_3)}$

Finalement la probabilité recherchée est

$$\frac{0.9 * 0.9}{0.85} \approx 0.95$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Correction

D'après la formule des probabilités totales on obtient :

$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P\left(A_{n+1} \cap \overline{A_n}\right) = 0.9 \times P(A_n) + 0.4 \times (1 - P(A_n)) = 0.9p_n + (1 - p_n)0.4 = 0.5p_n + 0.4$

Finalement

$$\boxed{p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4}$$

3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0,8$.

Correction

On pose donc $\mathbb{P}_n \quad : \quad p_n > 0,8$ pour $n \geqslant 1$

INITIALISATION :

Pour $n = 1$ on a : $p_1 = 1$ or $1 > 0.8$ donc $\mathbb{P}_1$ est vraie.

HÉRÉDITÉ :

On suppose donc que $\mathbb{P}_n$ est vraie c'est-à-dire que $p_n > 0,8$

On montre que $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie c'est-à-dire que $p_{n+1} > 0,8$

On a donc $p_n > 0.8$ ainsi $0.5p_n > 0.5 \times 0.8$ et donc $0.5p_n + 0.4 > 0.5 \times 0.8 + 0.4$

Et ainsi $p_{n+1} > 0.8$, donc $\mathbb{P}_{n+1}$ est vraie.

CONCLUSION :

La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1 : p_n > 0,8}$$

(b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

Correction

$p_{n+1} - p_n = 0.5p_n + 0.4 - p_n = p_n(0.5 - 1) + 0.4 = -0.5p_n + 0.4$

Or $p_n > 0.8$ donc on en déduit que $-0.5p_n < -0.4$ et donc $-0.5p_n + 0.4 < 0$

On en déduit que $p_{n+1} - p_n < 0$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (p_n) \text{ est décroissante.}}$$

(c) La suite (p_n) est-elle convergente ?

Correction

La suite est décroissante et minorée par 0.8

$$\boxed{\text{Elle est donc convergente.}}$$

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0,8$.

(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

Correction

$v_{n+1} = p_{n+1} - 0.8 = 0.5p_n + 0.4 - 0.8 = 0.5p_n - 0.4 = 0.5\left(p_n - \dfrac{0.4}{0.5}\right) = 0.5(p_n - 0.8) = 0.5v_n$

On a de plus $v_1 = p_1 - 0.8 = 1 - 0.8 = 0.2$

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de premier terme } 0.2 \text{ et de raison } 0.5.}$$

(b) Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

Correction

D'après la quesiton précédente on a $v_n = 0.2 \times 0.5^{n-1}$, on en déduit donc comme $v_n = p_n - 0.8$ que :

$$\boxed{p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Correction

On a donc $\lim_{n \to +\infty} 0.5^{n-1} = 0$ puisque $-1 < 0.5 < 1$
On remarque que le $n-1$ ne dérange pas...
Donc $\lim_{n \to +\infty} 0.2 \times 0.5^{n-1} = 0$
Finalement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0.8}$$