Exercice 1 2018 Liban Exo5

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

Correction

p_2 correspond à la probabilité de gagner la deuxième partie. Or pour gagner la deuxième partie, soit on gagne la première et on gagne la deuxième, soit on perd la première et on gagne la deuxième. On obtient donc :

$$p_2 = p_1 \times \frac{1}{4} + (1 - p_1) \times \frac{1}{2}$$

, finalement

$$\boxed{p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$.

Correction

Finalement la réponse à cette question est la même que la précédente en remplacant p_2 par p_{n+2} et p_1 par p_{n+1}.

On obtient donc que (formule des probabilités totales)

$$p_{n+2} = p_{n+1} \times \frac{1}{4} + (1 - p_{n+1}) \times \frac{1}{2}$$

Ce qui donne en développant :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,2500	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

Correction

On peut affirmer, au vu des premiers termes, que la limite de cette suite semble être 0.4.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0.4}$$

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

(a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Correction

On a :

$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} =$

$= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$

$= -\frac{1}{4}p_n + \frac{5}{10} - \frac{4}{10}$

$= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10}$

$= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{1}{4}(u_n)$

On ne déduit que la suite u_n est bien géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$

$$\boxed{u_n \text{ géométrique de raison } -\frac{1}{4}}$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Correction

On a donc $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $(u_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ est une suite géométrique et donc

$$u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On en déduit que, comme $p_n = u_n + \frac{2}{5}$

$$\boxed{p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

(c) La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Correction

On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \qquad$ car $-1 < -\frac{1}{4} < 1$

Ainsi

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

On en déduit donc que $(p_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ converge et que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}}$$

Ainsi si un joueur joue un grand nombre de fois il aura une probabilité de 0.4 de gagner une partie.