Exercice 1

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :
S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;
M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;
I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

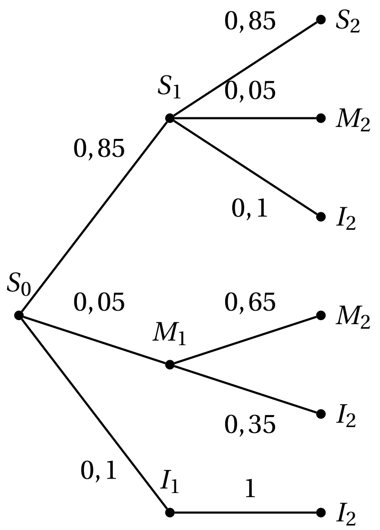
$$P(S_0) = 1 \; ; \; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :

Correction



2. Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.

Correction

On utilise la formule des probabilités totales :
On a :
$P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap I_1) = 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 = 0,2025$

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Correction

On doit donc calculer :
$P_{I_2}(M_1) = \dfrac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \dfrac{0,05 \times 0,35}{0,2025} = \dfrac{7}{81} \approx 0,086$

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n, on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

   On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65 v_n + 0,05 u_n$.

   Correction

   A chaque instant n un individu est obligatoirement dans un des trois états possibles I ou S ou M, et donc u_n, v_n et w_n peuvent être vu comme des proportions. Leur somme fait naturellement 1.

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions a. et b. suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

(a) Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

Correction

La formule suit la définition donnée par l'énoncé de v_{n+1} :

$$= 0,65 \times C_2 + 0,05 B_2$$

(b) On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'une certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.

Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.

Correction

Par une simple lecture des données de l'énoncé on obtient :

La quatrième semaine

3. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Correction

(b) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{4}\left(0,85^n - 0,65^n\right).$$

Correction

4. Calculer les limites de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Correction