Exercice 1

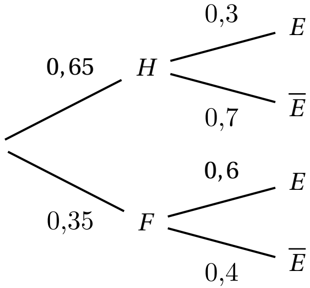
Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.
Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.
On note H l'évènement la personne choisie est un homme , F l'évènement la personne choisie est une femme , E l'évènement la personne choisie écoute les explications du démarcheur et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.
Rappel des notations :
Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :

Correction



2. (a) Traduire par une phrase l'évènement $F \cap E$ et calculer sa probabilité.

Correction

$F \cap E$ se traduit par : la personne est une femme et écoute les explications du démarcheurs. $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

(b) Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à $0,405$.

Correction

$P(E) = P(H \cap E) + P(F \cap E) = 0,65 \times 0,3 + 0,21 = 0,195 + 0,21 = 0,405$

La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est bien égale à $0,405$

(c) Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? *On donnera le résultat arrondi au centième.*

Correction

$$P_E(H) = \frac{P(H\cap E)}{P(E)} = \frac{0,65\times 0,3}{0,405} \approx 0,48$$

Sachant que la personne écoute le démarcheur, la probabilité que ce soit un homme est d'environ 0,48

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12 % des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.
Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.
On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   Correction

   On répète 60 fois une expérince de Barnouilli, de manière indépendante, avec une probabilité de succès égale à 0,12.

   X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.

   $$X \sim \mathscr{B}(60\ ;\ 0,12)$$

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).

Correction

$P(X=5) \approx 0,12$

La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné est d'environ 0,12

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. *On donnera une valeur arrondie au dix millième.*

Correction

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) \approx 0,9995$

La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est d'environ 0,9995

Exercice 2

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, $12,5\%$ de la population quitte la ville et 1200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012+n$. On a donc $U_0 = 40000$.

1. Calculer U_1 et U_2

Correction

Les $12,5\%$ de la population qui quittent la ville, représentent une baisse de $12,5\%$, soit un coefficient multiplicateur de 0,875.

A cela vient s'ajouter $1\ 200$ nouveau habitants.

(a) $U_1 = 0,875 \times U_0 + 1200$
$U_1 = 0,875 \times 40\ 000 + 1200$
$U_1 = 36\ 200$

(b) $U_2 = 0,875 \times U_1 + 1200$
$U_2 = 0,875 \times 36\ 200 + 1200$
$U_2 = 32\ 875$

---

2. Montrer que $U_{n+1} = 0,875U_n + 1200$

Correction

Chaque année les $12,5\%$ de la population qui quittent la ville, représentent une baisse de $12,5\%$, soit un coefficient multiplicateur de 0,875 en effet $1 - \dfrac{12,5}{100}$.

A cela vient s'ajouter $1\ 200$ nouveau habitants, il faut donc ajouter $1\ 200$.

On a donc :

$U_{n+1} = 0,875U_n + 1200$

---

3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

Correction

On a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 9600$
$v_{n+1} = 0,875 u_n 1200 - 9600$
$v_{n+1} = 0,875 u_n - 8400$
$v_{n+1} = 0,875\left(u_n - \frac{8400}{0,875}\right)$
$v_{n+1} = 0,875\left(u_n - \frac{8400}{0,875}\right)$
$v_{n+1} = 0,875\left(u_n - -9600\right)$

Donc $v_{n+1} = 0,875 v_n$

De plus :
$v_0 = u_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$

Donc (v_n) est une suite géométrique de terme initial 30400 et de raison 0,875

4. Exprimer V_n en fonction de n. En déduire que $U_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$

Correction

On sait que (V_n) est une suite géomértique, donc :
$V_n = V_0 \times q^n$
$V_n = 30400 \times 0,875^n$

Comme :
$V_n = U_n - 9600 \Longleftrightarrow U_n = V_n + 9600$
On a donc :
$U_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$

5. On considère l'algorithme suivant :

Variable

U, N

Initialisation

Traitement Tant que $U > 10\ 000$ faire :

N prend la valeur N+1

U prend la valeur $0,875 \times U + 1\ 200$

Fin Tant que

Sortie Afficher 2012 + N

Quelle est la valeur affichée par en sortie de l'algorithme ? Interpréter le résultat.

Correction

N	0	1	2	3	4	5
U	40000	36200	32875	29965	27419	25192
$U > 10\ 000$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

6	7	8	9	10	11	12
23243	21537	20045	18739	17597	16597	15723
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

13	14	15	16	17	18	19
14957	14287	13701	13189	12740	12348	12004
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

20	21	22	23	24	25	26
11703	11440	11210	11009	10833	10679	10544
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

27	28	29	30	31	32	33
10426	10322	10232	10153	10084	10023	9970
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

À la sortie de l'algorithme, n sera égal à 33.

$2012+33=2045$ donc l'algorithme affichera 2045.

Dans le contexte de l'exercice, on peut dire qu'à partir de 2045, la population de la ville sera inférieur à 10 000 habitants.

6. Déterminer la limite de la suite (U_n)

Correction

Comme $0<0,875<1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0,875^n=0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=30400\times 0=0$

De plus, comme $u_n=v_n+9600$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=9600$

7. Le maire de la ville, affirme qu'a long terme la popultaion de cette ville sera inférieur à 5 000 habitants. Que pensez-vous de cette affiramtion.

Correction

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 9600$, cela veut dire qu'à long terme la population de la ville se rapprochera de 9 600 habitants sans jamais l'atteindre, l'affirmation du maire est donc fausse.