

Correction devoir commun n°1

Terminale ES

Exercice 1

Un opérateur de téléphonie mobile organise une campagne de démarchage par téléphone pour proposer la souscription d'un nouveau forfait à sa clientèle, composée à 65 % d'hommes.

Des études préalables ont montré que 30 % des hommes contactés écoutent les explications, les autres raccrochant aussitôt (ou se déclarant immédiatement non intéressés). Parmi les femmes, 60 % écoutent les explications. On admet que ces proportions restent stables.

Partie A

On choisit au hasard une personne dans le fichier clients. Chaque personne a la même probabilité d'être choisie.

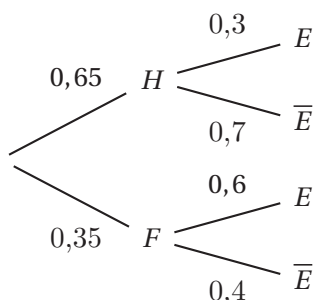
On note H l'évènement la personne choisie est un homme, F l'évènement la personne choisie est une femme, E l'évènement la personne choisie écoute les explications du démarcheur et \bar{E} l'évènement contraire de E .

Rappel des notations :

Si A et B sont deux évènements donnés, $P(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $P_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

- Recopier et compléter l'arbre de probabilité proposé ci-dessous :

Correction



- Traduire par une phrase l'évènement $F \cap E$ et calculer sa probabilité.

Correction

$F \cap E$ se traduit par : la personne est une femme et écoute les explications du démarcheurs.
 $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E) = 0,35 \times 0,6 = 0,21$

- Montrer que la probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est égale à 0,405.

Correction

$$P(E) = P(H \cap E) + P(F \cap E) = 0,65 \times 0,3 + 0,21 = 0,195 + 0,21 = 0,405$$

La probabilité que la personne choisie écoute les explications du démarcheur est bien égale à 0,405

- Le démarcheur s'adresse à une personne qui l'écoute. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? On donnera le résultat arrondi au centième.

Correction

$$P_E(H) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{0,65 \times 0,3}{0,405} \approx 0,48$$

Sachant que la personne écoute le démarcheur, la probabilité que ce soit un homme est d'environ 0,48

Partie B

Les relevés réalisés au cours de ces premières journées permettent également de constater que 12% des personnes interrogées souscrivent à ce nouveau forfait.

Chaque employé de l'opérateur effectue 60 appels par jour.

On suppose le fichier suffisamment important pour que les choix soient considérés réalisés de façon indépendante et dans des conditions identiques.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de souscriptions réalisées par un employé donné un jour donné.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Correction

On répète 60 fois une expérience de Bernoulli, de manière indépendante, avec une probabilité de succès égale à 0,12.

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,12$.

$$X \sim \mathcal{B}(60 ; 0,12)$$

2. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné. (*On arrondira le résultat au centième*).

Correction

$$P(X = 5) \approx 0,12$$

La probabilité que l'employé obtienne 5 souscriptions un jour donné est d'environ 0,12

3. Déterminer la probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné. (*On donnera une valeur arrondie au dix millième*).

Correction

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,9995$$

La probabilité que l'employé obtienne au moins une souscription un jour donné est d'environ 0,9995

Exercice 2

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1200 personnes s'y installent. En 2012, la ville comptait 40000 habitants. On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n . On a donc $U_0 = 40000$.

1. Calculer U_1 et U_2

Correction

Les 12,5% de la population qui quittent la ville, représentent une baisse de 12,5%, soit un coefficient multiplicateur de 0,875.

A cela vient s'ajouter 1 200 nouveau habitants.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad U_1 &= 0,875 \times U_0 + 1200 \\ U_1 &= 0,875 \times 40\,000 + 1200 \\ U_1 &= 36\,200 \\ \text{(b)} \quad U_2 &= 0,875 \times U_1 + 1200 \\ U_2 &= 0,875 \times 36\,200 + 1200 \\ U_2 &= 32\,875 \end{aligned}$$

2. Montrer que $U_{n+1} = 0,875U_n + 1200$

Correction

Chaque année les 12,5% de la population qui quittent la ville, représentent une baisse de 12,5%, soit un coefficient multiplicateur de 0,875 en effet $1 - \frac{12,5}{100}$.

A cela vient s'ajouter 1 200 nouveau habitants, il faut donc ajouter 1 200.

On a donc :

$$U_{n+1} = 0,875U_n + 1200$$

3. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$

Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.

Correction

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 9600 \\ v_{n+1} &= 0,875u_n + 1200 - 9600 \\ v_{n+1} &= 0,875u_n - 8400 \\ v_{n+1} &= 0,875\left(u_n - \frac{8400}{0,875}\right) \\ v_{n+1} &= 0,875\left(u_n - \frac{8400}{0,875}\right) \\ v_{n+1} &= 0,875(u_n - 9600) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } v_{n+1} = 0,875v_n$$

De plus :

$$v_0 = u_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de terme initial 30400 et de raison 0,875

4. Exprimer V_n en fonction de n . En déduire que $U_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$

Correction

On sait que (V_n) est une suite géométrique, donc :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = 30400 \times 0,875^n$$

Comme :

$$V_n = U_n - 9600 \iff U_n = V_n + 9600$$

On a donc :

$$U_n = 30400 \times 0,875^n + 9600$$

5. On considère l’algorithme suivant :

Variable

U, N

Initialisation

Traitement Tant que $U > 10\ 000$ faire :

N prend la valeur N+1

U prend la valeur $0,875 \times U + 1\ 200$

Fin Tant que

Sortie Afficher 2012 + N

Quelle est la valeur affichée par en sortie de l’algorithme ? Interpréter le résultat.

Correction

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
40000	36200	32875	29965	27419	25192	23243	21537	20045	18739	17597	16597	15723
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
14957	14287	13701	13189	12740	12348	12004	11703	11440	11210	11009	10833	10679
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
26	27	28	29	30	31	32	33					
10544	10426	10322	10232	10153	10084	10023	9970					
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux					

À la sortie de l’algorithme, n sera égal à 33.

$2012 + 33 = 2045$ donc l’algorithme affichera 2045.

Dans le contexte de l’exercice, on peut dire qu’à partir de 2045, la population de la ville sera inférieur à 10 000 habitants.

6. Déterminer la limite de la suite (U_n)

Correction

Comme $0 < 0,875 < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,875^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 30400 \times 0 = 0$$

De plus, comme $u_n = v_n + 9600$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 9600$$

7. Le maire de la ville, affirme qu'à long terme la population de cette ville sera inférieure à 5 000 habitants. Que pensez-vous de cette affirmation.

Correction

D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 9600$, cela veut dire qu'à long terme la population de la ville se rapprochera de 9 600 habitants sans jamais l'atteindre, l'affirmation du maire est donc fausse.
