1 Définition et représentation graphique

La fonction $\exp(x)$ est continue et strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$ et à valeur dans $]0;+\infty[$. Le théorème de la valeur intermédiaire nous assure donc que pour $\forall \beta \in]0;+\infty[$, l'équation :

$$e^x = \beta$$

admet une unique solution $\alpha \in]-\infty;+\infty[$.

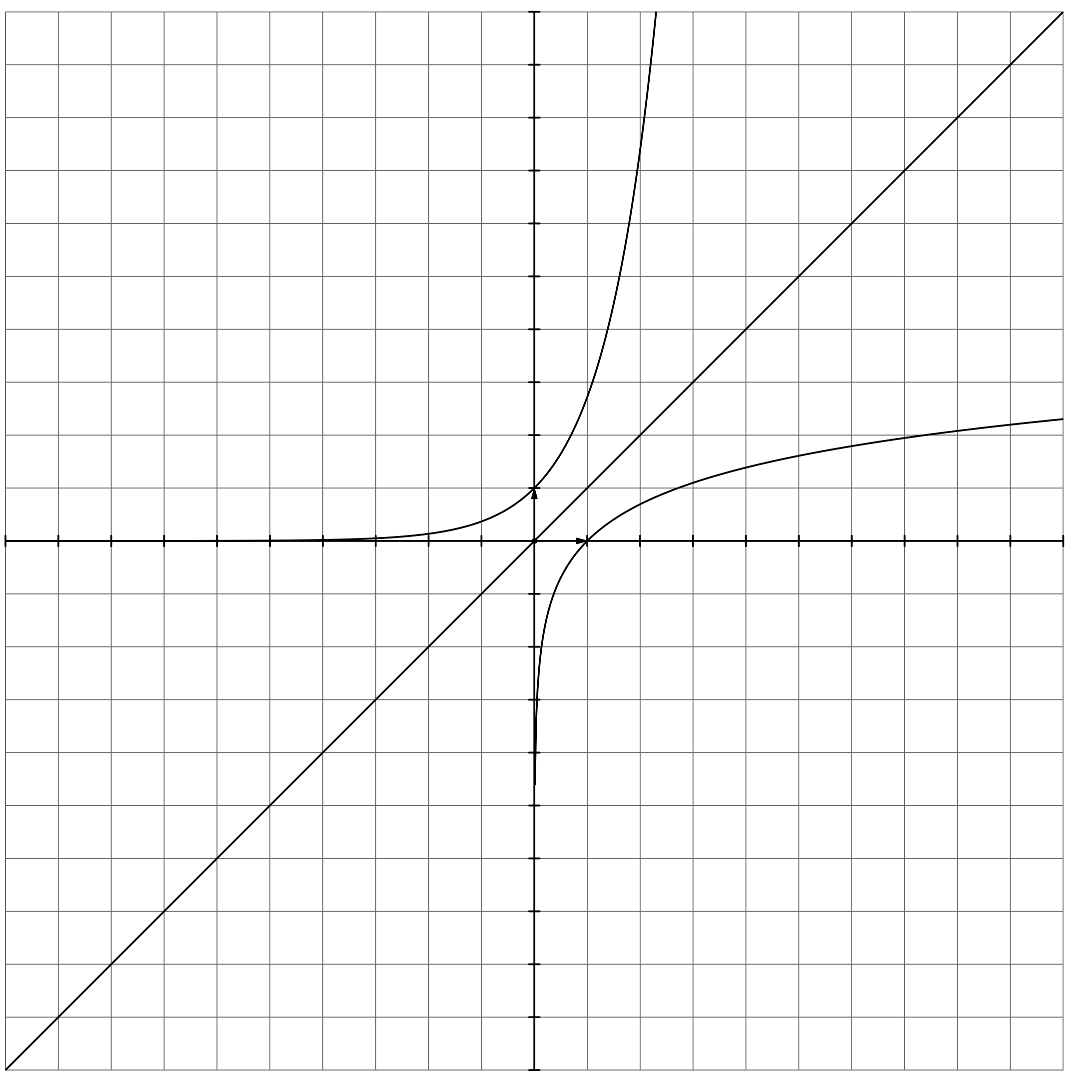
Cette solution se notera $\ln(\beta)$

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$
On notera $y = \ln(x)$ équivaut à $x = e^y$

Remarque

La courbe représentative du logarithme népérien est le symétrique de celle de la fonction exponentielle par rapport à la droite déquation $y = x$



2 Relation fonctionnelle

Théorème

Propriété fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

Par définition, on a :

a) $a = e^{\ln(a)}$ b) $b = e^{\ln(b)}$ c) $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$

On peut constater que : $a \times b = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)}$
d'après les propriétés de la fonction exponentielle $a \times b = e^{\ln(a)+\ln(b)}$
Donc $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$
Comme exp est strictement croissante, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Propriété

Autres propriétés

- $\forall a > 0$ on a $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\forall a > 0$, $\forall b > 0$ on a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\forall a > 0$ on a $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- $\forall a > 0$ on a $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

3 Dérivée et variation de ln

ln est fonction continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	||	$+$	
ln	||	0 $\nearrow$	