Exercice 1

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans une repère. Une représentation graphique est donnée en annexe.

1. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout $x \in [-2\,;\,4]$,

$$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Correction

$$f'(x) = \left((2x+1)\mathrm{e}^{-2x}\right)' + \left(3\right)'$$

$(2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ est de la forme $u \times v$ avec

$u(x) = 2x+1$	$v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$
$u'(x) = 2$	$v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$

On a donc :

$f'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} + (2x+1)(-2\mathrm{e}^{-2x})$

$f'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} + (-4x-2)\mathrm{e}^{-2x})$

$f'(x) = (2-4x-2)\mathrm{e}^{-2x})$

$f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x})$

2. Étudier les variations de f.

Correction

Comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, f' est du signe de $-4x$

$-4x = 0$

$x = \dfrac{0}{-4}$
$x = 0$

x	-2		0		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-2) \approx -160$	↘	4	↗	$f(4$

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2 ; 0]$ et donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

Correction

(a) Sur $[-2 ; 0]$, f est continue
(b) $f(-2) \approx -160$ donc $f(-2) < 0$
(c) $f(0) = 4$ donc $f(0) > 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution.

Comme en plus f est strictement croissante, cette solution est unique.

D'après la calculatricre :

Une valeur approchée de α peut être $-0,8$.

4. On note f'' la fonction dérivée de f'. On admet que, pour tout $x \in [-2\ ;\ 4]$,

$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}.$$

(a) Étudier le signe de f'' sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

Correction

Comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$, f'' est du signe de $-4x$

$8x - 4 = 0$

$8x = 4$

$x = \dfrac{4}{8}$

$x = \dfrac{1}{2}$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-2		$0,5$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$

(b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Correction

Donc f est connexe sur $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 4\right]$

5. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par $g(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.

   (a) Vérifier que la fonction G définie pour tout $x \in [-2\,;\,4]$ par $G(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de la fonction g.

   Correction

   $G(x)$ est de la forme $u \times v$ avec

   $u(x) = -x-1$ $\quad$ $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

   $u'(x) = -1$ $\quad$ $v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$

   $G'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-2x} + (-x-1) \times (-2\mathrm{e}^{-2x})$

   $G'(x) = - \times \mathrm{e}^{-2x} + (2x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

   $G'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x}$

   $G'(x) = g(x)$

   (b) En déduire une primitive F de f.

   Correction

   Comme $f(x) = g(x)+3$

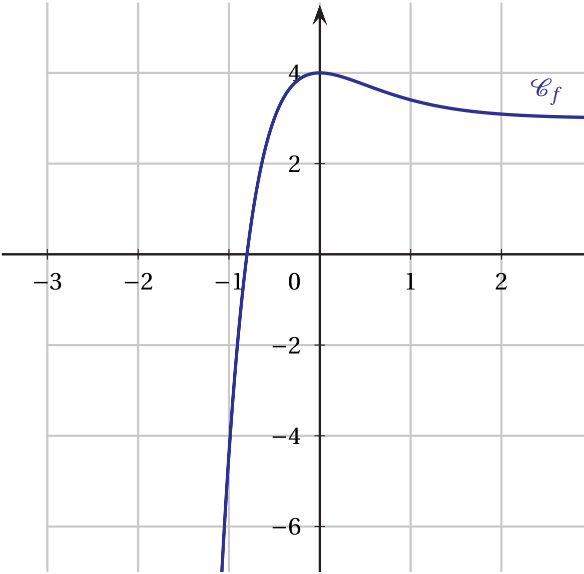
   $F(x) = G(x)+3x$ est une primitive de $f(x)$.

   $F(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 3x$

6. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

   (a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.

Correction



(b) Par lecture graphique, donner un encadrement de $\mathscr{A}$, en unité d'aire, par deux entiers consécutifs.

Correction

Par lecture graphique, on a $\mathscr{A} \in [3\ ;\ 4]$

(c) Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis une valeur approchée au centième.

Correction

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

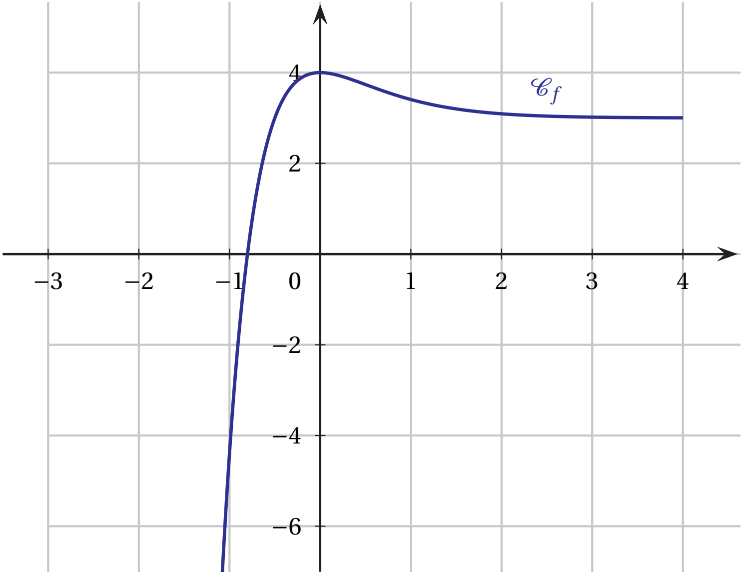
$$\mathscr{A} = F(1) - F(0)$$

$$\mathscr{A} = (-1-1)\mathrm{e}^{-2\times 1} + 3\times 1 - \left((-0-1)\mathrm{e}^{-2\times 0} + 3\times 0\right)$$

$$\mathscr{A} = -2\mathrm{e}^{-2} + 3 + 1$$

$$\mathscr{A} = -2\mathrm{e}^{-2} + 4$$

$$\mathscr{A} \approx 3,73$$



$\mathscr{C}_f$
4
2
0
−2
−4
−6
−3
−2
−1
1
2
3
4