Exercice 1

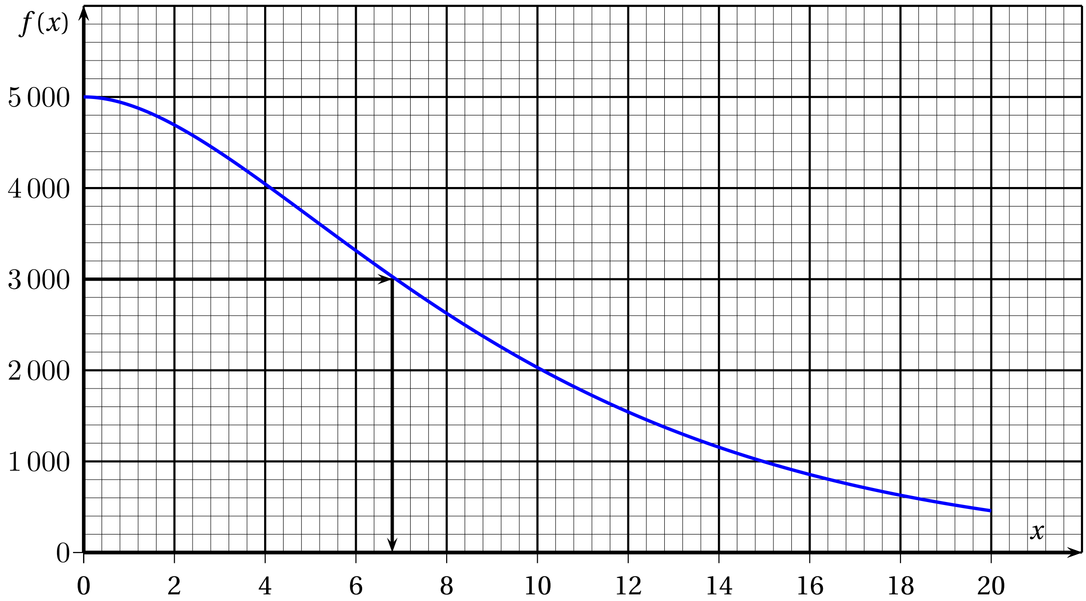
On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0 ; 20]$ par :

$$f(x) = 1\,000(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Partie A - Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.
Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

Correction



1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3\,000$.

Correction

$f(x) = 3\,000 \Longleftrightarrow x \approx 6,8$

2. Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de f entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

Correction

> « *D'après moi c'est mission impossible ... étant donné qu'un gros carreau reprsente 2000u.a, mais sinon il s'agit de l'aire sous la courbe*

Partie B - Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0 ; 20]$.
Démontrer que pour tout x de $[0 ; 20]$, $f'(x) = -200x\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Correction

f est de la forme $u \times v$, avec

$u(x) = 1\,000(x+5)$ $\qquad$ $v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$

$u'(x) = 1\,000$ $\qquad$ $v'(x) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2x}$

Donc :

$f'(x) = u'(x) \times u(x) + u(x) \times v'(x)$

$f'(x) = 1000 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + np1000(x+5) \times (-0,2\mathrm{e}^{-0,2x})$

$f'(x) = 1000\mathrm{e}^{-0,2x} + np{-200}(x+5) \times \mathrm{e}^{-0,2x}$

$f'(x) = (1000 - 200(x+5))\,\mathrm{e}^{-0,2x}$

$f'(x) = (1000 - 200x - 1000))\,\mathrm{e}^{-0,2x}$

$f'(x) = -200x\mathrm{e}^{-0,2x}$

2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0 ; 20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.

Correction

Comme $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ sur $[0 ; 20]$, $f'(x)$ est du signe de $-200x$.

De plus sur $[0 ; 20]$, $-200x \leq 0$.

On en deduit le tableau de variation suivant :

x	0		20
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	5000	$\searrow$	$f(20) \approx 458$

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution α sur $[0 ; 20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

Correction

> “ *Comme d'habitude c'est le théorème des valeurs intermédiaires, on s'applique sur la rédaction.*

- f est continue sur $[0 ; 20]$.
- $f(0) = 5000$ donc $f(0) > 3000$
- $f(0) \approx 458$ donc $f(20) < 3000$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3000$ admet une solution.
De plus comme f est strictement décroissante, cette solution est unique.

D'après la calculatrice :

$f(6,88) \approx 3001$

$f(6,89) \approx 2997$

$\alpha \approx 6,88$

4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par l'expression $F(x) = -5\,000(x+10)\mathrm{e}^{-0,2x}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,20]$.

   Calculer $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

   Correction

   $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F(2)$

   $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = -5\,000(8+10)\mathrm{e}^{-0,2\times 8} - \left(-5\,000(2+10)\mathrm{e}^{-0,2\times 2}\right)$

   $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = -90000\mathrm{e}^{-1,6} - \left(60000\mathrm{e}^{-0,4}\right)$

   $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x = -90000\mathrm{e}^{-1,6} + 60000\mathrm{e}^{-0,4}$

   $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 22049$

Partie C - Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.
Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

1. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ?

   Correction

   “ On utilise les variations de la fonctions et la réponse de la question B-3

   On sait que la solution de l'équation $f(x) = 3000$ apprtient à l'intervalle $[6,88\ ;\ 6,89]$ et que f est décroissante. c'est donc en dessous de 6,88 € que la demande sera supérieure à 3 000 objets.

2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,8]$. Interpréter ce résultat.

   Correction

   “ Cette fois, on utilise le résultat de la question B-4

   Soit μ la valeur moyenne de la fonction f alors :

   $\mu = \dfrac{1}{8-2}\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

   $\mu \approx \dfrac{1}{6} \times 22049$

   $\mu \approx 3675$

   On peut donc estimer que pour un prix compris entre 2€ et 8€ , la demande moyenne est d'environ 3675 pièces.