Exercice 1

Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage, situé en aval, d'une hauteur de 10 m.
On mesure le niveau de l'eau chaque jour à midi.
Le 1er janvier 2018, à midi, le niveau du lac était de $6{,}05$ m.

Entre deux mesures successives, le niveau d'eau du lac évolue de la façon suivante :

- d'abord une augmentation de 6 % (apport de la rivière) ;
- ensuite une baisse de 15 cm (écoulement à travers le barrage).

1. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac à midi, en cm, n jours après le 1er janvier 2018.
   Ainsi le niveau d'eau du lac, en cm, le 1er janvier 2018 est donné par $u_0 = 605$.

   (a) Calculer le niveau du lac, en cm, le 2 janvier 2018 à midi.

   Correction

   Le coefficient multiplicateur lié a une augmentation de 6% est égal à 1,06.
   Après l'augmentation de 6%, le niveau est de 641,3 cm $605 \times 1{,}06 = 641{,}3$
   Et donc le 2 janvier 2018, après la baisse de 15 cm, le niveau sera de 626,3 cm
   $641{,}3 - 15 = 626{,}3$

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$.

   Correction

   Le coefficient multiplicateur lié a une augmentation de 6% est égal à 1,06.
   Ensuite il faut soustraire pour 15 pour prendre en compte la baisse de 15 cm.
   Donc pour passer d'un terme au suivant on a donc :
   $u_{n+1} = 1{,}06u_n - 15$

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 250$.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1{,}06$.
   Préciser son terme initial.

   Correction

   D'une part :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 250$
   $v_{n+1} = 1{,}06u_n - 15 - 250$
   $v_{n+1} = 1{,}06u_n + 265$

   D'autre part :
   $1{,}06v_n = 1{,}06\,(u_n - 250)$
   $1{,}06v_n = 1{,}06u_n - 1{,}06 \times 250$
   $1{,}06v_n = 1{,}06u_n - 265$

   Donc $v_{n+1} = 1{,}06v_n$

   De plus :
   $v_0 = u_0 - 250 = 605 - 250 = 355$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de terme initial 355 et de raison 1,06

   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 355 \times 1{,}06^n + 250$.

Correction

On sait que (v_n) est une suite géomértique, donc :
$v_n = v_0 \times q^n$
$v_n = 355 \times 1,06^n$

Comme
$v_n = u_n - 250 \Longleftrightarrow u_n = v_n + 250$
On a donc :
$u_n = 355 \times 1,06^n + 250$

3. Lorsque le niveau du lac dépasse 10 m, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.

   (a) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction

Comme $1,06 > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1,06^n = +\infty$
De plus $355 > 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \infty$

Donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$

   (b) L'équipe d'entretien devra-t-elle ouvrir les vannes afin de réguler le niveau d'eau ? Justifier la réponse.

Correction

L'équipe devra donc ouvrir les vannes car le niveau tend vers l'infine et donc dépassera les 10m.

4. Afin de déterminer la première date d'intervention des techniciens, on souhaite utiliser l'algorithme incomplet ci-dessous.

   (a) Recopier et compléter l'algorithme.

Correction

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 605$
Tant que U < 10 000 faire
    $U \leftarrow 1.06U - 15$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que

   (b) À la fin de l'exécution de l'algorithme, que contient la variable N ?

Correction

Comme :

$u_{12} \approx 964,3$

$u_{13} \approx 1007,2$

La variable N contiendra 13.

(c) En déduire la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

Correction

Le rang 13 correspond au 14 janvier.

C'est donc au 14 janvier 2018 que les techniciens devront intervenir.