Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 150 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 45.$$

1. Calculer u_1, et u_2.
2. Voici deux propositions d'algorithmes :

Algorithme 1	Algorithme 2
Variables :	**Variables :**
N est un entier naturel	N est un entier naturel
U est un nombre réel	U est un nombre réel
Initialisation :	**Initialisation :**
U prend la valeur 150	U prend la valeur 150
N prend la valeur 0	N prend la valeur 0
Traitement :	**Traitement :**
Tant que $U \geqslant 220$	Tant que $U < 220$
U prend la valeur $0,8 \times U + 45$	U prend la valeur $0,8 \times U + 45$
N prend la valeur $N+1$	N prend la valeur $N+1$
Fin Tant que	Fin Tant que
Sortie :	**Sortie :**
Afficher N	Afficher N

Algorithme 1 **Algorithme 2**

(a) Un seul de ces algorithmes permet de calculer puis d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 220$. Préciser lequel en justifiant pourquoi l'autre algorithme ne le permet pas.

Correction

Dans l'algorithme 1, la condition $U \geqslant 220$ n'est pas vérifié dés le départ. Donc la boucle TANT QUE n'est jamais effectué.
L'affichage de sortie est donc 0

(b) Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme choisi à la question précédente ?

Correction

Étape	Initialisation	1	2	3	4	5	6
U	150	165	177	186,6	194,28	200,42	205,34
N	0	1	2	3	4	5	6
$U < N$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

7	8	9	10	11	12	13
209,27	212,41	214,94	216,95	218,56	219,84	220,87
7	8	9	10	11	12	13
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

La valeur numérique affichée par l'algorithme sera donc 13.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.

(a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

Correction

D'une part :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 225$
$v_{n+1} = 0,8 \times u_n + 45 - 225$
$v_{n+1} = 0,8 \times u_n - 180$

D'autre part :
$0,8v_n = 0,8\big(u_n - 225\big)$
$0,8v_n = 0,8 \times u_n - 0,8 \times 225$
$0,8v_n = 0,8 \times u_n - 180$

Donc $v_{n+1} = 0,8v_n$
La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,8.

$v_0 = u_0 - 225 = -75$
Le terme initiale de la suite (v_n) est $v_0 = -75$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.

Correction

D'après la question précédente :
$v_n = v_0 \times q^n = -75 \times 0,8^n$
Or
$v_n = u_n - 225 \Leftrightarrow u_n = v_n + 225$
Donc $u_n = -75 \times 0,8^n + 225$

4. Une petite ville de province organise chaque année une course à pied dans les rues de son centre. En 2015, le nombre de participants à cette course était de 150. On fait l'hypothèse que d'une année sur l'autre :
   - 20 % des participants ne reviennent pas l'année suivante ;
   - 45 nouveaux participants s'inscrivent à la course.

   La petite taille des ruelles du centre historique de la ville oblige les organisateurs à limiter le nombre de participants à 250. Vont-ils devoir refuser des inscriptions dans les années à venir ? Justifier la réponse.

   Correction

   On note u_n le nombre de participants à cette course à l'année $2015+n$. Une baisse de 20% correspond à un coefficient multiplicateur de $0,8$
   Les 45 nouveaux participants correspondent à un ajout de 45.
   Donc :
   $$\begin{cases} u_0 = 150 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 45 \end{cases}$$

   D'après la question 2 b), on $u_n = -75 \times 0,8^n + 225$

   Comme $0 < 0,8 < 1$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$

   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -75 \times 0 + 225 = 225$
   A long terme le nombre de participants à cette course se stabilisera vers 225, sans le dépasser. Il ne sera donc pas nécessaire de refuser des inscriptions.