Rappels des cours de premieres

Cours sur la dérivation :

Vidéo :

Cours sur le second dégré :

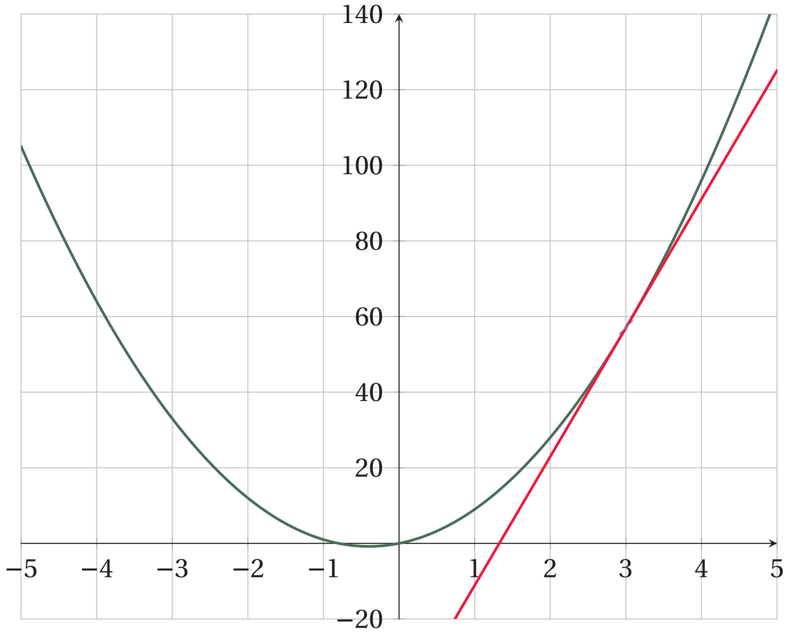
Vidéo :

Nombre dérivé

Soit f une fonction continue sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a s'appelle le nombre dérivé en a. On le note $f'(a)$

Pour déterminer le nombre dérivé de f en a on étudie le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Exercice 1

Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = 5x^2 + 4x$ en 3 (*on le notera* $f'(3)$).

Exercice 2

Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en 2.

Correction en vidéo :

Déterminer le nombre dérivé de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ en 1.

Correction en vidéo :

Dérivée et variation

Propriété fondammentale

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de R.

- f est constante sur I, si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I, si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I, si et seulement si pour tout réel x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.

Le théorème ci-dessus, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur I et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule et change de signe, alors f admet un extremum local en x_0.

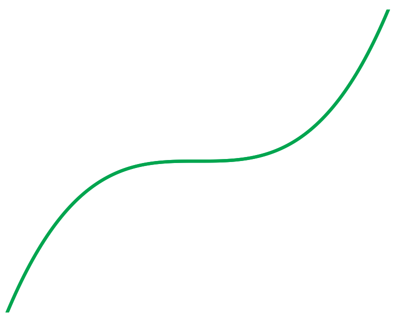
x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	minimum	$\nearrow$

x		x_0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

Remarque

Dans la proposition 2. l'hypothèse en changeant de signe est importante. Considérons la fonction cube définie sur R par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur R par $f'(x) = 3x^2$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



La fonction cube est strictement croissante sur R et n'admet pas d'extremum en 0.

Exercices

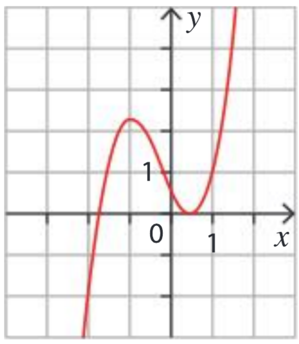
Exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
A partir du signe de f', completer le tableau de varaition de la fonction f.

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f									

Exercice 4

D'après la représentation graphique de la fonction f, ci-dcontre :



1. Determiner les solutions de l'équation $f'(x) = 0$
2. Déterminer le tableau de signe de la dérivée f'.

Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	dérivée	Intervalle
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Exercice 5

1. Déterminer la fonction dérivé de x^4
2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ déterminer la fonction dérivée $f'(x)$

Opérations sur les dérivées

Dérivation et opération sur les fonctions

Fonction	dérivée
$u+v$	$(u+v)'=u'+v'$
ku avec $k\in\mathbb{R}$	$(ku)'=ku'$
uv	$(uv)'=u'v+uv'$
u^2	$(u^2)'=2uu'$
u^3	$(u^3)'=3u^2u'$
u^n	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{v}$	$(\frac{1}{v})'=\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exercice 6

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x)=5x^2-8x+3$
2. $g(x)=\dfrac{5x+1}{2x^2+3}$
3. $m(x)=(2x+1)\sqrt{x}$
4. $n(x)=\dfrac{1}{x-2}$

Exemple : Étude de variation d'une fonction

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 1 - \dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Pour étudier les variations de f on doit :

1. **Calculer $f'(x)$.**

   Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

   $f = 1 - \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec : $\begin{array}{l} u(x) = 4x-3 \text{ d'où } u'(x) = 4 \\ v(x) = x^2+1 \text{ d'où } v'(x) = 2x \end{array}$

   Soit pour tout réel x,

   $f'(x) = -\dfrac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}$

   $f'(x) = -\dfrac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2}$

   $f'(x) = -\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$

2. **Étudier du signe de f'**

   Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

   Étudions le signe de $f'(x) = \dfrac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

   Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 > 0$.

   Donc $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a = 4, b = -6$ et $c = -4$.

   Pour étudier le signe de $4x^2-6x-4$, on chercher les racines du trinôme.

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$

   Soit $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x_1 = \dfrac{6-\sqrt{10}}{8} = -\dfrac{1}{2}$

   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x_2 = \dfrac{6+\sqrt{10}}{8} = 2$

   Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

3. **Tableau de variation de f**

   Nous pouvons déduire le tableau de variation de f, du signe de f'.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

Equation de la tangente en un point

Définition

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable en un point a.
La tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété

Une équation de la tangente $\mathscr{T}_a$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

$$\mathscr{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour déterminer l'équation de la tangente, il faudra donc auparavent avoir trouver :

— L'image de a par la fonction f $(f(a))$

— L'image de a par la fonction f' $(f'(a))$

On demandera presque toujours de données l'équation réduite de la tangente, il faut donc développer et réduire l'expression obtenue par la formule.

Exemple

Déterminer l'équation la tangente en 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{(x)}$

— L'image de 2 par la fonction f est $f(2) = \sqrt{(2)}$

— L'image de 2 par la fonction f' est $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{(2)}}$

On a donc :

$T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$T_2 : y = \dfrac{1}{2\sqrt{(2)}}(x-2) + \sqrt{(2)}$

$T_2 : y = \dfrac{1}{2\sqrt{(2)}}x - \dfrac{2}{2\sqrt{(2)}} + \sqrt{(2)}$

$T_2 : y = \dfrac{1}{2\sqrt{(2)}}x - \dfrac{1}{\sqrt{(2)}} + \dfrac{2}{\sqrt{(2)}}$

$T_2 : y = \dfrac{1}{2\sqrt{(2)}}x + \dfrac{1}{\sqrt{(2)}}$

Exercice 7

Correction en vidéo :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$
Déterminer une équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.