Rappels

- R1 : Le polynôme du 3ème degré $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ admet pour dérivée $P'(x)=3ax^2+2bx+c$
- R2 : : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de dérivée f', alors :
  - Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est **croissante**
  - Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est **décroissante**
- R3 : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré, alors son discriminant est :

$$\Delta = b^2-4ac$$

- R4 : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré, alors
  - Si $\Delta<0$, $P(x)=0$ n'admet pas de solution
  - Si $\Delta=0$, $P(x)=0$ admet une solution :

$$x_1=\frac{-b}{2a}$$

  - Si $\Delta>0$, $P(x)=0$ admet 2 solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- R5 : Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré, alors l'étude de son signe :
  - Si $\Delta<0$, alors

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

  - Si $\Delta=0$, alors

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

  - Si $\Delta>0$,alors (avec $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		sgn a	0	sgn $-a$	0	sgn a	

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-x^2-2x+1$.

1. Calculer la fonction dérivée de f.

Correction

" *Pour cette question, on doit déterminer la dérivée d'un polynôme de degré 3, R1,dans cet exemple le coefficient b est égal à 1*

$f'(x)=3\times4x^2-2x^2-6$

$f'(x)=12x^2-2x^2-2$

2. Déterminer le signe de f' en fonction de x.

Correction

" *Avant d'étudier le signe de f'(x), cherchons les solutions de l'équation $f'(x)=0$ R3 - R4. On en déduira après le tableau de signe de $f'(x)$* R3 - R4

$f'(x)=12x^2-2x^2-2$

$\Delta=(-2)^2-4\times12\times-2$

$\Delta=100$

Comme $\Delta>0$, $f'(x)=0$ admet 2 solutions :

$x_1=\frac{1+\sqrt{100}}{2\times4}$ et $x_2=\frac{1-\sqrt{100}}{2\times4}$

$x_1=1,375$ et $x_2=1,125$

$a=12$ donc $a>0$, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1125		1375		$+\infty$
$P(x)$		+	0	−	0	+	

Exemple

3 Dresser le tableau de variations de f.

Correction

" *Ici, on utilise le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction* R2

x	$-\infty$		$1,125$		$1,375$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(1,125)$	$\searrow$	$f(1,375)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 2 d'après baccalauréat 2017 - Antilles Guyane

Un bijoutier souhaite lancer un nouveau modèle de bijou contenant de l'or.
On admet que le coût de production de ce bijou, exprimé en millier d'euros, est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x + 15$ où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués.
On admet également que la recette, exprimée en millier d'euros, est modélisée par la fonction R définie par $R(x) = 15x$ où x représente le nombre de centaines de bijoux fabriqués et vendus.
Le nombre de bijoux fabriqués et vendus est compris entre 50 et 300 donc $x \in [0,5\ ;\ 3]$.

1. Montrer que la fonction bénéfice B est définie pour tout $x \in [0,5\ ;\ 3]$ par $B(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15$.
   On se rappelle que le bénéfice est la différence entre les recettes et le coût.
2. Déterminer $B'(x)$ pour $x \in [0,5\ ;\ 3]$, où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ pour $x \in [0,5\ ;\ 3]$. En déduire le tableau de variations de B.
4. Préciser alors le nombre de bijoux fabriqués et vendus qui permet de réaliser un bénéfice maximal.

Correction de l'exercice 1

1. $V_1 = 55,35$ $\qquad V_2 \approx 56,73$
2. $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$
3. .

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$f(4,5)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

Correction de l'exercice 2

1. $B(x) = 15x - (2x^3 - 3x^2 + 3x + 15)$
   $B(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 15$
2. $B'(x) = -6x^2 + 6x + 12$
3. .

x	$0,5$		2		3
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	$-8,5$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6

4. Le maximum de la fonction B est atteint pour $x = 2$.
   Il faut donc fabriquer 200 bijoux pour que le bénéfice soit maximal.