Dérivation - Point de vue global

Exercice 2 p.160

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x+1}\,.$$

1. Écrire f sous la forme d'une somme de deux fonctions u et v dont on précisera l'expression.
2. En déduire la fonction dérivée de f.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 13 p.160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $n(x) = \sqrt{3}x^2 - \pi x + \dfrac{1}{3}$
- $p(x) = (2x^2 - x + 1)(-7x + 8)$
- $r(x) = \dfrac{3x-7}{x}$
- $s(x) = \dfrac{x+5}{2x-1}$
- $t(x) = \dfrac{x^2+3x-7}{x+5}$
- $w(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{7-3x}$

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 14 p.160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $f(x) = -5\sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{23}{x}$
- $h(x) = 15x^2$
- $j(x) = 3x - 5 + 7\sqrt{x}$
- $k(x) = 3\sqrt{4x+2} - 5x + x^2$
- $m(x) = -\pi - \dfrac{1}{3}x$

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 15 p.160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $n(x) = (-5+3x)^7$
- $p(x) = (8-x)(2x^2 - x + 7)$
- $r(x) = \dfrac{x^2}{x}$
- $s(x) = \dfrac{7x+2}{x-1}$
- $t(x) = \dfrac{-2x^2+x-1}{7x+1}$
- $w(x) = \dfrac{5}{2-7x}$

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 23 p.161

Raisonner, chercher

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \frac{1}{x}\,.$$

1. Expliquer pourquoi la fonction f est définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
2. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.
3. En déduire le signe de f' sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
4. En déduire le tableau de variation de f.
5. Tracer sur l'écran de la calculatrice la courbe représentative de f pour vérifier le tableau.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 28 p.161

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\,;8]$. Le tableau de signes de $f'(x)$ est le suivant.

x	0		3		8
$f'(x)$		+	0	−	

- Sachant que $f(2) = 0$ et $f(8) = 3$, dresser le tableau de variation et le tableau de signes de f.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 30 p.161

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4.$$

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de f sur $[-3\,;2]$.
3. Quel est le maximum de f sur $[-3\,;2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?
4. Quel est le minimum de f sur $[-3\,;2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 31 p.161

On considère la fonction g définie sur $[-3\,;2]$ par :

$$g(x) = \frac{3x+2}{x+6}\,.$$

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variation de g sur $[-3\,;2]$.
3. Quel est le maximum de g sur $[-3\,;2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?
4. Quel est le minimum de g sur $[-3\,;2]$?
Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 37 p.162

On veut montrer que pour tout réel $x \in\,]-\infty\,;3]$, $\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 \leqslant 4$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

1. Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Quel est le maximum de f sur $]-\infty\,;3]$?
3. Conclure.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 55 p.165

Modéliser

Une fenêtre se compose d'un rectangle surmonté d'un triangle isocèle rectangle. Le périmètre de sa partie rectangulaire est égal à trois mètres.

- Quelles doivent être les dimensions de la fenêtre pour qu'elle donne un éclairement maximal ?

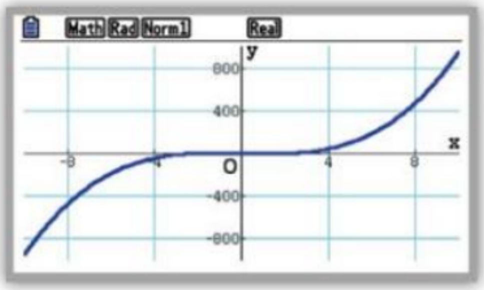
source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 49 p.165

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 5x.$$

On a obtenu à la calculatrice, la courbe suivante.



1. Que peut-on conjecturer sur les variations de la fonction f ?

2. On souhaite démontrer la conjecture précédente.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Déterminer le tableau de variation de f.

d. Conclure.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 53 p.165

Bénéfice d'un artisan

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut en produir plus de 70 par semaine.

Le coût de production, en euro, est modélisé par l fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 1{,}05x^2 + 91x + 225.$$

Chaque objet est vendu 80 euros.

1. a. Quel est le montant des coûts fixes pour cet artisan

b. Combien lui coûte la production de 25 objets ?

c. Vérifier que la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\,;70]$.

2. Le bénéfice, en euro, qu'il retire de la production et de la vente de x objets, est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;70]$.

a. Exprimer $B(x)$ en fonction de x.

b. Vérifier que $B(25) = 0$.

3. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;70]$.

a. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour gagner de l'argent.

b. En déduire le nombre d'objets que l'artisan doit vendre et produire pour que son bénéfice soit maximal.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 67 p.167

Etude marketing

Une marque de soda a lancé une vaste campagne de publicité pour promouvoir une nouvelle boisson auprès des jeunes.

La fréquence des jeunes connaissant ce nouveau soda est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{2t+1}{2t+4},$$

où t désigne le nombre de mois écoulés depuis le début de la campagne.

1. Quel est le pourcentage de jeunes qui connaissent cette boisson au début de la campagne ? Quel est le pourcentage de jeunes qui connaissent cette boisson au bout d'un mois ?

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0{,}75$.

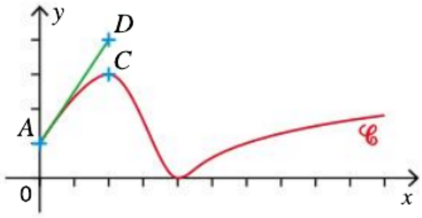
Interpréter le résultat obtenu.

4. Au bout de combien de mois plus de 90 % des jeunes connaîtront-ils cette nouvelle boisson ?

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 75 p.168

75 On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique.



Les coordonnées des points indiqués sont $A\,(0\,;1)$, $D\,(2\,;4)$ et $C\,(2\,;3)$.
La droite (AD) est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
La courbe rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse 4.
On sait aussi que $f(6) = 1$ et que la tangente au point d'abscisse 6 passe par le point $E\,(3\,;0)$.

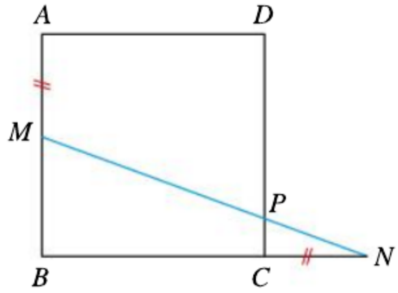
1. Par lecture graphique :
a. déterminer $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(6)$;
b. déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 6 ;
c. dresser le tableau de signes de f'.

2. On considère la fonction g définie par $g = \dfrac{1}{f}$.
a. Déterminer le domaine de définition de g.
b. Donner l'expression de g' à l'aide de f et de f'.
c. En déduire le sens de variation de g.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 80 p.169

$ABCD$ est un carré de côté 1.
M est sur le segment $[AB]$.
On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC)$ à l'extérieur du segment $[BC]$.
La droite (MN) coupe (DC) en P.
On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.



Le but de l'exercice est de trouver M sur $[AB]$ tel que la distance PC soit maximale.

1. Exprimer BM et BN en fonction de x.

2. Montrer que $PC = \dfrac{-x^2 + x}{x+1}$.

3. En déduire la position du point M maximalisant la longueur PC.

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 82 p.170

On considère la fonction w définie par :

$$w(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}.$$

1. Existe-t-il une valeur interdite pour w ?

2. Déterminer les variations de la fonction w.

3. Dans un repère, on appelle $\mathscr{C}_w$ la courbe représentative de la fonction et $\mathscr{T}_{-2}$ sa tangente au point d'abscisse (-2).
Déterminer l'équation de $\mathscr{T}_{-2}$.

4. Le point $\left(1\,;\dfrac{61}{25}\right)$ appartient-il à cette droite ?

source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice 96 p.172

96 Volume d'eau

On dépose une bille sphérique de rayon 9 cm dans un récipient cylindrique indéformable de diamètre 18 cm que l'on remplit d'eau jusqu'à ce que le niveau d'eau soit tangent à la bille.
On retire la bille sans emporter d'eau ni en rajouter, et on cherche à savoir s'il est possible de plonger une autre bille de rayon différent telle que le niveau de l'eau soit de nouveau tangent à la bille.

Questions Va piano

1. Calculer le volume d'eau, le volume de la bille de rayon 9 cm et le volume du cylindre jusqu'à la hauteur d'eau.
2. On note r le rayon de la nouvelle bille (si elle existe).
Quel est le volume de la nouvelle bille en fonction de r ?
3. Montrer que le problème revient à obtenir un volume d'eau et de bille égal au volume total du cylindre jusqu'à la nouvelle hauteur d'eau.
4. Montrer que la question précédente revient à trouver les solutions de l'équation $4r^3 - 486r + 1\,458 = 0$.
5. CALCULATRICE Conjecturer la solution à l'aide de la calculatrice.

Questions Moderato

1. Montrer que le problème revient à trouver le nombre de solutions sur $[0\,;9]$ de l'équation $4r^3 - 486r + 1\,458 = 0$.
2. Montrer que :
$(r-9)(4r^2+36r-162) = 4r^3 - 486r + 1\,458$.
3. Conclure.

Questions Allegro

1. Montrer que le problème revient à obtenir les solutions de l'équation :
$$4r^3 - 486r + 1\,458 = 0.$$
2. On considère la fonction définie sur $[0\,;9]$ par $f(x) = 4r^3 - 486r + 1\,458$.
Calculer la fonction dérivée de la fonction f puis en déduire le tableau de variation de f.
3. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;9]$.
4. Conclure.

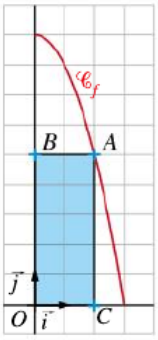
source : Barbazo - 1ère Spécialité

Exercice TP 5 p. 158

TP 5 Aire maximale LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE

Objectif
Modéliser une situation géométrique.

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on a représenté ci-contre la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(x) = 9 - x^2$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
A est un point mobile sur $\mathscr{C}_f$, C et B sont des points respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tels que $OCAB$ soit un rectangle.
On veut déterminer où placer le point A pour que le rectangle $OCAB$ ait une aire maximale.



1. Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie puis conjecturer le résultat.
On note x l'abscisse du point A.
2. Dans quel intervalle varie x ?
3. On note $g(x)$ l'aire du rectangle $OCAB$. Quelle est l'expression de $g(x)$?
4. Tracer la courbe représentative de g.
Quel semble être le maximum de g et pour quelle valeur de x est-il atteint ?
5. Montrer que $g'(x) = -3x^2 + 9$ et étudier les variations de la fonction g.
6. Retrouve-t-on les résultats de la question 1 ?
7. Conclure.

source : Barbazo - 1ère Spécialité