

1 Définition de la dérivée d'une fonction

Définitions Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **dérivable** sur I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I , noté $f'(x)$.
- On appelle **fonction dérivée** de f sur I , notée f' , la fonction définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

Exercice résolu 1 Étudier la dérivabilité d'une fonction.

Soit a un nombre réel quelconque. À l'aide du taux de variation, montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a puis retrouver l'expression de la dérivée de la fonction carré.

▼ Solution

Pour étudier la dérivabilité de f en a , il faut tout d'abord s'intéresser au taux de variation de f en a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Lorsque h devient très proche de zéro, cette quantité se rapproche de $2a$ qui est un nombre fini.

La fonction est donc dérivable en a et on a $f'(a) = 2a$.

2 Fonction dérivée des fonctions de référence

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
Fonction constante : $f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
Fonction affine : $f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Fonction carrée : $f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
Fonction puissance : $f(x) = x^n$, n entier naturel non nul	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Fonction valeur absolue : $f(x) = x $	$\mathbb{R}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Exercice résolu 2 Déterminer la fonction dérivée.

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

① $f(x) = 3x + 5$

② $f(x) = \sqrt{x}$

③ $f(x) = x^7$

④ $f(x) = \sqrt{2}$

⑤ $f(x) = 3 - 2x$

▼ Solution

① f est une fonction affine $mx + p$ avec $m = 3$, donc $f'(x) = 3$.

② f est la fonction racine carrée donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

③ f est une fonction puissance x^n avec $n = 7$, donc $f'(x) = 7x^6$.

- 4 f est une fonction constante donc $f'(x) = 0$.
- 5 f est une fonction affine $mx + p$ avec $m = -2$, donc $f'(x) = -2$.

3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

1. La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
2. Soit k un réel. La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
3. La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
4. Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.
5. Si la fonction v ne s'annule pas sur I , alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Théorème (admis) Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout x réel tel que $mx + p$ appartient à I , la fonction f définie par $f(x) = g(mx + p)$ est dérivable et $f'(x) = m \times g'(mx + p)$.

EXEMPLE On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x + 6)^4$.

f est de la forme $f : x \mapsto g(mx + p)$ avec $g(x) = x^4$, $m = 5$ et $p = 6$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $g'(x) = 4x^3$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = m \times g'(mx + p) = 5 \times 4 \times (5x + 6)^3 = 20(5x + 6)^3$.

Exercice résolu 3 Déterminer la dérivabilité d'une fonction.

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le ou les intervalle(s) sur le(s)quel(s) elle est dérivable et déterminer sa fonction dérivée.

- 1 $f : x \mapsto 7x^2 - 5x$ 2 $g : x \mapsto \frac{3}{x}$ 3 $h : x \mapsto \frac{3x + 1}{2x^2 + 5}$ 4 $f : x \mapsto \sqrt{x}(6x^3 - 2)$

▼ Solution

- 1 f est la somme de deux fonctions $u : x \mapsto 7x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v : x \mapsto -5x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u' + v'$.

$u'(x) = 7 \times 2x = 14x$ et $v'(x) = -5$, donc $f'(x) = 14x - 5$.

- 2 g est de la forme ku , avec $k = 3$ et $u : x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = ku'(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$.

- 3 h est le quotient de deux fonctions $u : x \mapsto 3x + 1$ et $v : x \mapsto 2x^2 + 5$ dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x , $v(x) > 0$, donc v ne s'annule pas. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On en déduit : $h'(x) = \frac{3 \times (2x^2 + 5) - (3x + 1) \times 4x}{(2x^2 + 5)^2} = \frac{6x^2 + 15 - 12x^2 - 4x}{(2x^2 + 5)^2} = \frac{-6x^2 - 4x + 15}{(2x^2 + 5)^2}$.

- 4 m est le produit de deux fonctions $u : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $v : x \mapsto 6x^3 - 2$ dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que m est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $m' = u'v + uv'$.

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 18x^2$, donc

$$m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (6x^3 - 2) + \sqrt{x} \times 18x^2 = \frac{3x^3 - 1}{\sqrt{x}} + \frac{x \times 18x^2}{\sqrt{x}} = \frac{21x^3 - 1}{\sqrt{x}}$$

- 1 Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x^2 + \sqrt{x+1}.$$

1. Écrire f sous la forme d'une somme de deux fonctions u et v dont on précisera l'expression.

2. En déduire la fonction dérivée de f .

- 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-3x + 7)(5x + 1).$$

1. écrire f sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v dont on précisera l'expression.

2. En déduire la fonction dérivée de f .

3. Donner la forme développée de f puis retrouver le résultat précédent.

- 3 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-3x-7}{x^2} \text{ pour tout } x \text{ non nul.}$$

1. Quelles sont les fonctions u et v telles que

$$f = \frac{u}{v} ?$$

2. En déduire la fonction dérivée de f .

3. Justifier que $f(x) = -\frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}$ puis retrouver le résultat précédent.

- 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 7.$$

1. À l'aide du taux de variation, montrer que f est

dérivable en $a = -2$ et donner $f'(-2)$.

2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de f' .

- 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-8}{x}$ pour tout réel x non nul.

1. À l'aide du taux de variation, montrer que f est dérivable en $a = -5$ et donner $f'(-5)$.

2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi que l'expression de f' .

- 6 Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

$$\bullet f(x) = -x^2$$

$$\bullet g(x) = -\frac{\pi}{x}$$

$$\bullet h(x) = 18\sqrt{x}$$

$$\bullet j(x) = -x + 8 + \sqrt{x}$$

$$\bullet k(x) = \frac{3}{x} + 3x^2 + 7$$

$$\bullet m(x) = -3\sqrt{2x+5}$$

- 7 Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

$$\bullet n(x) = \sqrt{3}x^2 - \pi x + \frac{1}{3}$$

$$\bullet p(x) = (2x^2 - x + 1)(-7x + 8)$$

$$\bullet r(x) = \frac{3x-7}{x}$$

$$\bullet s(x) = \frac{x+5}{2x-1}$$

$$\bullet t(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x+5}$$

$$\bullet w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7-3x}$$

Comprendre une démonstration

On présente la démonstration de la propriété suivante. La lire attentivement puis répondre aux questions.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration

On considère la fonction $f = u \times v$. Soit x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I .

Le taux de variation de f en x_0 s'écrit $T(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

On remplace l'expression de f en fonction de u et v : $T(h) = \frac{u(x_0 + h) \times v(x_0 + h) - u(x_0) \times v(x_0)}{h}$.

$$\text{Soit } T(h) = \frac{u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0 + h) + u(x_0)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \quad (1)$$

$$T(h) = v(x_0 + h) \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + u(x_0) \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \quad (2)$$

Lorsque h tend vers 0, on a :

- $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$ tend vers $u'(x_0)$;
- $\frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$ tend vers $v'(x_0)$;
- on admet que $v(x_0 + h)$ tend vers $v(x_0)$.

Donc $T(h)$ tend vers $v(x_0) \times u'(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$. (3)

On peut donc dire que f est dérivable en x_0 et que l'on a :

$$f'(x_0) = v(x_0) \times u'(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0) . \quad (4)$$

On obtient $f' = u'v + uv'$. (5)

- ① Justifier l'introduction de l'expression en rouge ligne (1).
- ② Expliquer la réorganisation du calcul de la ligne (2).
- ③ Justifier la ligne (3).
- ④ Justifier le passage de l'écriture du nombre dérivé en x_0 en ligne (4) à l'égalité entre fonctions de la ligne (5).

Rédiger une démonstration

On souhaite démontrer la propriété suivante.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si la fonction u ne s'annule pas sur I alors la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

En utilisant les indications suivantes, démontrer cette propriété.

- Poser $f = \frac{1}{u}$ et considérer x_0 , un élément de I .
- Écrire le taux de variation de la fonction u en x_0 .
- Écrire le taux de variation de la fonction f en x_0 .
- Vérifier que ce taux de variation peut s'écrire : $\frac{1}{u(x_0 + h)u(x_0)} \times \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$
- En déduire la limite de ce taux de variation lorsque h tend vers 0 et retrouver ainsi le résultat de cours. On admettra que $u(x_0 + h)$ tend vers $u(x_0)$ lorsque h tend vers 0.

Correction des exercices

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = 6x + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\textcircled{2} \quad f'(x) = -30x + 32$$

$$\textcircled{3} \quad f'(x) = \frac{3x+14}{x^3}$$

$$\textcircled{4} \quad T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 3$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$\textcircled{5} \quad T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{8}{a(a+h)}$$

$$f'(x) = \frac{8}{x^2}$$

$$\textcircled{6} \quad \bullet f'(x) = -2x \quad \bullet g'(x) = \frac{\pi}{x^2}$$

$$\bullet h'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} \quad \bullet j'(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\bullet k'(x) = -\frac{3}{x^2} + 6x \quad \bullet m'(x) = -\frac{3}{\sqrt{2x+5}}$$

$$\textcircled{7} \quad \bullet n'(x) = 2\sqrt{3}x - \pi$$

$$\bullet p'(x) = -42x^2 + 46x - 15$$

$$\bullet r'(x) = \frac{7}{x^2} \quad \bullet s'(x) = \frac{11}{4x^2 - 4x + 1}$$

$$\bullet t'(x) = \frac{x^2 + 10x + 22}{x^2 + 10x + 25}$$

$$\bullet w(x) = \frac{15x + 35}{\sqrt{x}(18x^2 - 84x + 98)}$$