Équations de droites

Rappels

Propriété — Critère de colinéarité

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont 2 vecteurs colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.

Définition — Vecteur directeur d'une droite

Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Propriété — Droites parallèles

Les droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab - ab = 0$.

Exemple — Déterminer une équation de droite

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points $A(7\ ;\ 2)$ et $B(3\ ;\ 4)$.

Pour déterminer l'équation cartésienne d'une droite, il faut avoir les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$.

— Etape 1 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur.
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

— Etape 2 : Déterminer l'équation de la droite .
D'après le cours :
$-2x - (-4)y + c = 0$
$2x + 4y + c = 0$

Comme $A(7\ ;\ 2)$ appartient à la droite d, les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne :
$2x_A + 4y_A + c = 0$
$2 \times 7 + 4 \times 2 + c = 0$
$14 + 8 + c = 0$
$22 + c = 0$
$c = -22$

Ainsi d a pour équation cartésienne :
$2x + 4y - 22 = 0$

A faire :

Correction en vidéo :

Correction en vidéo :

On considère un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(4\ ;\ 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1\ ;\ 5)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d' passant par les points $B(5\ ;\ 3)$ et $C(1\ ;\ -3)$.

Vecteur normal

Définition

Soit une droite d, on appelle vecteur normal à une droite d, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété

— Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.

— Réciproquement, la droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration

— Soit un point $A(x_A;y_A)$ de la droite d.

$M(x;y)$ est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soit $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

$ax+by-ax_A-by_A=0$

En notant $c=-ax_A-by_A$, on obtient :

$ax+by+c=0$

— Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de d alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $\vec{u}.\vec{v}=-b\times a+a\times b=0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Exemple

Determiner une équation cartésienne (*vecteur normal*)

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(3;1)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d, une équation cartésienne de d est de la forme $-5x+3y+c=0$

Le point $A(3;1)$ appartient à la droite d, donc : $-5\times3+3\times1+c=0$ et donc $-15+3+c=0 \Leftrightarrow -12+c=0$

Une équation cartésienne de d est : $-5x+3y+12=0$

A faire :

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère la droite d passant par le point $A(-5;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3;-1)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

A faire :

— Exercice 2

— Exercice 8

— Exercice 10

— Exercice 13

— Exercice 43

Équation de cercle

Propriété

Équation de cercle

Une équation du cercle de centre $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de rayon r est :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$$

A faire :

En utilisant le fait que tout point $M(x;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\ ;\ y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2=r^2$, montrer que l'équation du cercle de centre A et de rayon r est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$.

Exemple

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(5\ ;\ 7)$ et de rayon 3.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

$$(x-5)^2+(y-7)^2=3^2$$

$$(x-5)^2+(y-7)^2=9$$

A faire :

Correction en vidéo :

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(4;-1)$ et passant par le point $B(3;5)$.

— Déterminer le rayon du cercle

— Déterminer une équation du cercle C

Exemple

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2+y^2-8x-14y+20=0$.
Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$x^2+y^2-8x-14y+20=0$
$(x^2-8x)+(y^2-14y)+20=0$
$(x^2-2\times 4\times x)+(y^2-2\times 7\times y)+20=0$
En utilisant l'identité remarquable :
$(x^2-2\times 4x)+(y^2-2\times 7y)+20=0$
$(x^2-4)^2-16+(y-7)^2-49+20=0$
$(x^2-4)^2+(y-7)^2-45=0$
$(x^2-4)^2+(y-7)^2=45$
$(x^2-4)^2+(y-7)^2=\sqrt{45}^2$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées $(4;7)$ et de rayon $\sqrt{45}$.

A faire :

Correction en vidéo :

Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2+y^2-2x-10y+17=0$.
Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

A faire :

— exercice 33 p.262

— exercice 47 p.264

— exercice 85 p.268

Exercice 1

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2\ ;\ 3)$ et de rayon 3

1. Déterminer l'équation cartesienne du cercle $\mathscr{C}$
2. Justifier que le point $A(1\ ;\ 3)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point A