

# Les graphes



Cours

## Activité

### Exercice 1 – Facebook★

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen sont sur le réseau social FriendLink. Dans ce réseau on peut être ami.

- **A**bel est ami avec Corentin et David ;
- **B**riec est ami avec Corentin et Ewen ;
- **C**orentin est ami avec Abel, Briec et David ;
- **D**avid est ami avec Abel et Corentin ;
- **E**wen est ami avec Briec.

1. Ewen doit transmettre un message à David. Auquel de ses amis doit-il le donner ? À qui son ami devra-t-il le donner ?

.....  
.....

2. Trouver un moyen de représenter la situation de manière à visualiser les liens d'amitiés.

3. On cherche à compléter le tableau suivant.

	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

### Exercice 2 – Réseau social

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social Insta-Follow. Dans ce réseau social, on peut suivre des utilisateurs.

- **A**bel suit les messages de Corentin et David ;
- **B**riec suit ses messages et ceux de Corentin ;
- **C**orentin suit les messages de David ;
- **D**avid suit ses propres messages ;
- **E**wen suit les messages d'Abel.

1. Combien de personnes Abel suit-il ? Même question pour chaque utilisateur.

.....

2. Qui suit les messages de David ?

.....

3. Existe-t-il des utilisateurs qui se suivent eux-mêmes ? Lesquels ?

.....

4. Trouver un exemple de chemin permettant d'aller de Ewen à David.

.....

5. Peut-on aller de David à Ewen ? Justifier.

.....

6. Compléter : dans ce réseau, les relations sont-elles réciproques ? Expliquer.

.....

7. Représenter cette situation par un schéma.

.....

## Introduction

### **i** Pourquoi les graphes ?

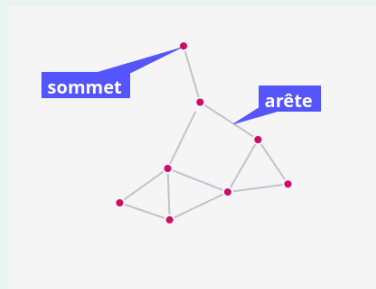
Dans le cours sur les réseaux, nous avons représenté les routeurs par des cercles et les connexions entre eux par des traits. Cette représentation correspond à un **graphe**.

Il existe de nombreuses autres applications aux graphes : représentation de réseaux informatiques, de réseaux urbains, de circuits électroniques, de liaisons moléculaires, ou encore de **réseaux sociaux**.

## Premières définitions

### **📖** Arête et sommet

Un **graphe** est un ensemble de points nommés **sommet**, dont certains sont connectés par des **arêtes**.



### **⚠** Remarque

On peut représenter des graphes simples à l'aide de cercles et de lignes. La position des sommets et la longueur des arêtes n'ont pas d'importance : seule compte la manière dont ils sont connectés les uns aux autres.

Les **arêtes** peuvent même se croiser et n'ont pas besoin d'être droites.

### **📖** Graphe orienté et arc

Dans certains graphes, les arêtes ont un sens et sont modélisées par des flèches. On les appelle des **arcs**.

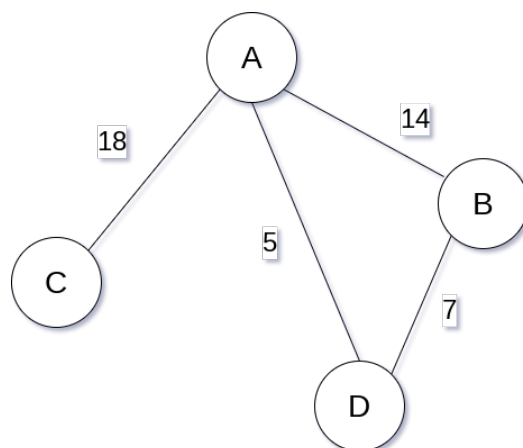
Ce type de graphe est appelé **graphe orienté**.

## Graphe pondéré

### Graphe pondéré

Dans certains graphes, les arêtes portent un nombre. Ces graphes sont appelés **graphes pondérés**.

Le nombre figurant sur une arête s'appelle ..... de l'arête.

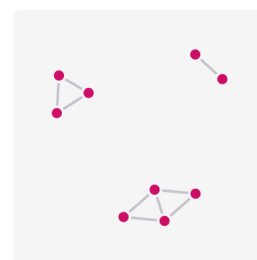


### Remarque

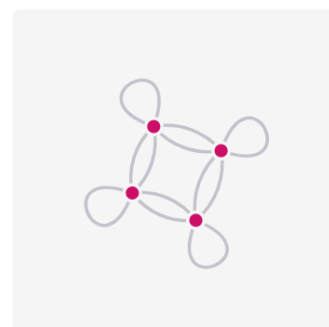
Nous avons déjà rencontré ce type de graphe en travaillant sur les réseaux.

## Autres types de graphes

Certains graphes sont constitués de plusieurs groupes de sommets qui ne sont pas connectés les uns aux autres. Ces graphes sont dits **non connexes**.



D'autres graphes peuvent contenir plusieurs arêtes entre les mêmes paires de sommets, ou des sommets connectés à eux-mêmes (boucles).



## Chaîne, chemin, cycle et circuit

### Exercice 3 – Vocabulaire ★

Relier les notions à leurs définitions.

- |                    |                          |                          |   |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|---|
| Chaîne             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Une chaîne ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-à-dire dont tous les sommets sont distincts.                              |
| Chemin             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>non orienté</b> , une suite d'arêtes consécutives <b>distinctes</b> dont les deux sommets extrémités sont identiques. |
| Chaîne élémentaire | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>non orienté</b> , une suite finie d'arêtes consécutives reliant deux sommets.   |
| Chaîne simple      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | La notion équivalente à celle d'un cycle mais dans un graphe orienté.   |
| Cycle              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>orienté</b> , une suite finie d'arcs consécutifs reliant deux sommets.  |
| Circuit            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Une chaîne ne passant pas deux fois par une même arête, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont distinctes.                            |

## Métriques sur les graphes

### Ordre et degré

#### Ordre

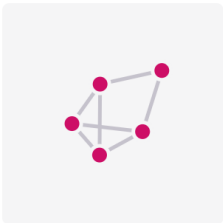
L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets qu'il possède.

#### Degré

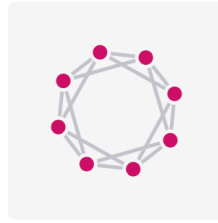
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.

#### Exercice 4 – Ordre d'un graphe ★

Déterminer l'ordre de chacun des graphes ci-dessous :



ordre : .....



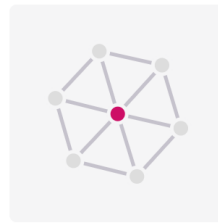
ordre : .....

#### Exercice 5 – Degré d'un sommet ★

Déterminer, pour chacun des graphes ci-dessous, le degré du sommet rouge :



degré : .....



degré : .....

### Autres métriques

Un graphe possède d'autres caractéristiques :

- la **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent ;
- la **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne qui les relie ;
- le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets quelconques ;

- le **centre** d'un graphe est le sommet qui minimise la distance maximale aux autres sommets;
- le **rayon** d'un graphe est la distance maximale entre le centre et les autres sommets.

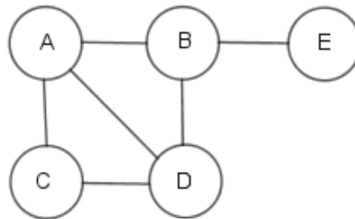
## Adjacence

### Sommets adjacents et graphe complet

#### 📖 Sommets adjacents

Deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.

#### Exercice 6 – Sommets adjacents ★



Dans le graphe ci-dessus, le sommet C est adjacent au sommet :

A                                       B                                       E

#### 📖 Voisinage

Le **voisinage** d'un sommet est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.

#### Exercice 7 – Voisinage ★

En reprenant le graphe précédent, déterminer le voisinage du sommet D.

 Réponse

.....

#### 📖 Graphe complet

Un graphe est dit **complet** lorsque tous ses sommets sont adjacents deux à deux, c'est-à-dire que chaque paire de sommets distincts est reliée par exactement une arête.

**Exercice 8 – Graphe complet** ★

On considère les graphes suivants :



Graphe A



Graphe B



Graphe C



Graphe D

Parmi les graphes ci-dessus, lequel est complet?  A  
 B  C  D

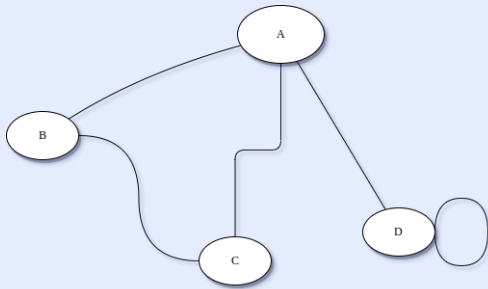
## Matrice d'adjacence

### Matrice d'adjacence

Une **matrice d'adjacence** est un tableau à deux dimensions qui représente les relations d'adjacence entre les sommets d'un graphe.

#### Exemple

On considère le graphe ci-contre :

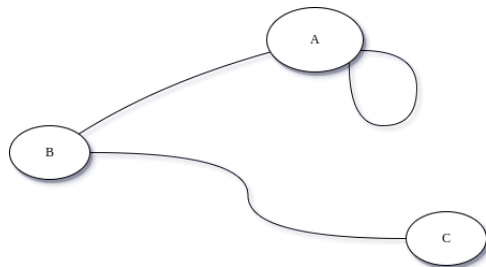


La matrice d'adjacence correspondante est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 9 – Graphe vers matrice

Déterminer la matrice d'adjacence du graphe ci-contre :



Réponse

**Exercice 10 – Matrice vers graphe** ★

On considère un graphe doté des sommets A, B, C, D et E, dont la matrice d'adjacence est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposer une représentation graphique de ce graphe.

 Réponse