



# Graphes

## Introduction

*i* Dans le cours sur les réseaux, nous avons représenté les routeurs par des cercles et les connexions entre eux par des traits. Quand nous utilisons cette représentation, nous utilisons déjà les **graphes**.

Il existe de nombreuses autres applications aux graphes, par exemple pour représenter les réseaux, Internet, les réseaux urbains, les circuits électroniques et même les liaisons moléculaires. Ils sont même utilisés pour représenter les **réseaux sociaux** entre amis et familles.

### • Les graphes aux B.O.

*i* On retrouve la notion de graphe dans deux parties du BO

#### •• Structure de données

Contenu	Capacités attendues	Commentaires
Graphes : structures relationnelles. Sommets, arcs, arêtes, graphes orientés ou non orientés.	Modéliser des situations sous forme de graphes. Écrire les implémentations correspondantes d'un graphe : matrice d'adjacence, liste de successeurs/de prédécesseurs. Passer d'une représentation à une autre.	On fait le lien avec la rubrique « algorithmique ». On s'appuie sur des exemples comme le réseau routier, le réseau électrique, Internet, les réseaux sociaux. Le choix de la représentation dépend du traitement qu'on veut mettre en place : on fait le lien avec la rubrique « algorithmique ».

#### •• Algorithme

Contenu	Capacités attendues	Commentaires
Algorithme sur les graphes	Parcourir un graphe en profondeur d'abord, en largeur d'abord. Repérer la présence d'un cycle dans un graphe. Chercher un chemin dans un graphe.	Le parcours d'un labyrinthe et le routage dans Internet sont des exemples d'algorithme sur les graphes. L'exemple des graphes permet d'illustrer l'utilisation des classes en programmation.

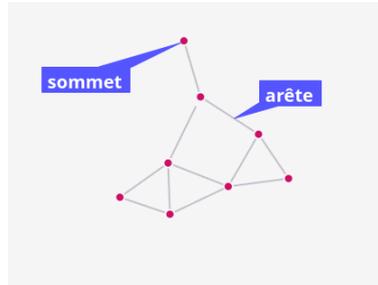
## Premières définitions

---

### Définition

### Arête & sommet

Un **graphe** est un ensemble de points nommés ....., dont certains sont connectés par des .....



### Remarque

Nous pouvons représenter des graphes simples à l'aide de cercles et de lignes. La position des sommets et la longueur des bords n'a pas d'importance – nous nous soucions uniquement de la manière dont ils sont connectés les uns aux autres.

Les **arêtes** peuvent même se croiser et n'ont pas besoin d'être droites

### Définition

### Graphe orienté et arc

Dans certains graphes, les arêtes ont un sens, elles sont modélisées par des flèches.

On les appelle des .....

Ce type de graphe est appelé .....

---

### Exercice 1 ★

Abel, Briec, Corentin, David et Ewen postent des messages sur un réseau social. Un message peut-être « aimé » par n'importe quel utilisateur, y compris son créateur. On regarde, sur une période de deux semaines, qui a aimé les messages de qui. Voici les résultats :

- **A**bel a aimé des messages de Corentin et David ;
- **B**riec a aimé ses messages et ceux de Corentin ;
- **C**orentin a aimé les messages de David ;
- **D**avid a aimé ses propres messages ;
- **E**wen a aimé les messages d'Abel.

1. Le relation "aimer" est-elle symétrique ?

.....  
.....

2. Le graphe représentant la situation va donc être un graphe orienté ou non-orienté ?

.....

3. Ewen va donc être relié à ?

.....  
.....

4. Construire, ci-dessous, le graphe représentant la situation

---

● **Graphe pondéré**

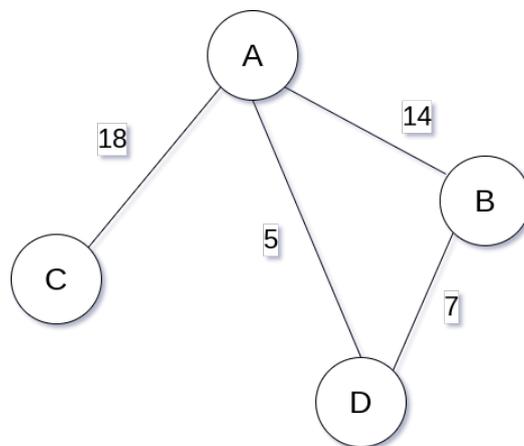
Définition

Graphe pondéré

Dans certains graphes les arêtes portent un nombre. Ces graphes sont appelés **graphes pondérés**.

Le nombre figurant sur une arête s'appelle .....de l'arête.

---



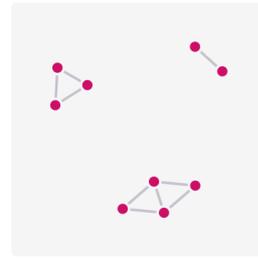
**Remarque**

Nous avons déjà vu ce type de graphe quand nous travaillons sur les réseaux.

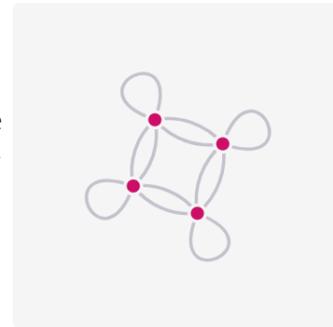
## •D'autre type de graphe

---

Certains graphes sont constitués de plusieurs groupes de sommets qui ne sont pas connectés les uns aux autres. l'autre par les bords. Ces graphes sont **non connexes**.



D'autres graphiques peuvent contenir plusieurs arêtes entre les mêmes paires de sommets, ou sommets qui sont connectés à eux-mêmes (boucles).



## •Chaîne, chemin, cycle et circuit

---

### Exercice 2

---

Relier les notions à leurs définitions

- |                    |                          |                          |   |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|---|
| Chaîne             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Une chaîne ne passant pas deux fois par un même sommet, c'est-à-dire dont tous les sommets sont distincts.                              |
| Chemin             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>non orienté</b> , une suite d'arêtes consécutives <b>distinctes</b> dont les deux sommets extrémités sont identiques. |
| Chaîne élémentaire | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>non orienté</b> , une suite finie d'arêtes consécutives reliant deux sommets.   |
| Chaîne simple      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | La notion équivalente à celle d'un <b>cycle</b> mais dans un graphe orienté.  |
| Cycle              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Dans un graphe <b>orienté</b> , une suite finie d'arêtes consécutives reliant deux sommets.   |
| Circuit            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Une chaîne ne passant pas deux fois par une même arête, c'est-à-dire dont toutes les arêtes sont distinctes.                            |
-

## Métriques sur les graphes

### ●Ordre et degré

#### Définition

Ordre

Nous disons que l'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets qu'il possède.

#### Définition

degré

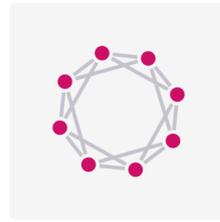
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui se rencontrent à ce sommet.

#### Exercice 3 ★

Déterminer l'ordre chacun des graphes ci-dessous :



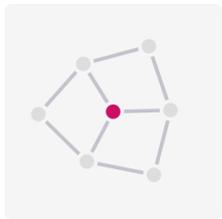
ordre : ...



ordre : ...

#### Exercice 4 ★

Déterminer, pour chacun des graphes ci-dessous, le degré du sommet rouge :



degré : ...



degré : ...

### ●Autres métriques

Un graphe possède d'autres caractéristiques, telles que :

- la **longueur** d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui relient les sommets de cette chaîne ;
- la **distance** entre deux sommets est égale à la longueur de la plus petite chaîne qui les relie ;
- le **diamètre** entre deux sommets est égal à la longueur de la plus grande chaîne qui les relie ;
- le **centre** d'un graphe est le sommet qui a la longueur la plus petite avec les autres sommets ;
- le **rayon** d'un graphe est égal à la plus petite longueur qui permet de relier le centre à tous les autres sommets.

## Adjacence

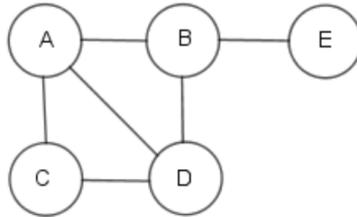
### • Sommets adjacents et graphe complet

#### Définition

#### Sommets adjacents

Deux sommets sont adjacents s'ils sont reliés par une arête.

#### Exercice 5 ★



Dans le graphe ci-dessus, le sommets **C** est adjacent au sommet ?

A

B

E

#### Définition

#### Voisinage

Le voisinage d'un sommet est l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents.

#### Exercice 6 ★

En reprenant le graphe précédent, déterminer le voisinage du sommet **D**?

.....

#### Définition

#### Graphe complet

Un graphe est dit complet lorsque tous ses sommets sont adjacents.

#### Exercice 7 ★

On considère le graphe suivant :



Graphe A



Graphe B



Graphe C



Graphe D

Parmi les graphe ci-dessus, lequel est complet ?

A

B

C

D

## •Matrice d'adjacence

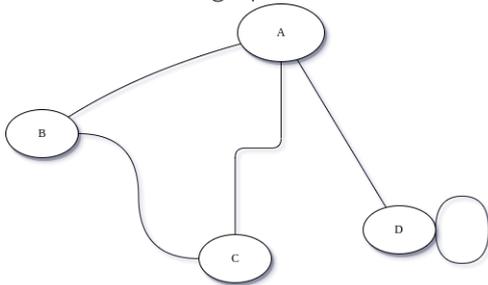
### Définition

### Matrice d'adjacence

Une matrice d'adjacence est une matrice (une sorte de tableau à deux dimensions) qui représente les relations d'ajacence entre 2 sommets.

### Exemple

On considère le graphe ci-dessous :

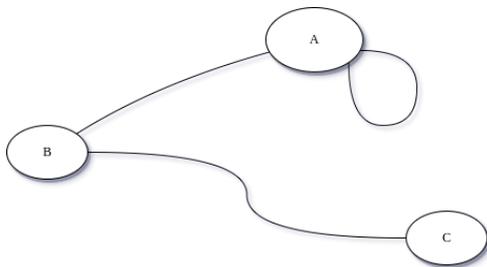


La matrice d'adjacence correspondante est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 8 ★

Déterminer la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous :



### Exercice 9 ★

On considère le graphe doté des sommet A,B,C,D et E, dont la matrice d'adjacence est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une représentation du graphe associé.