15 Integration

•Vocabulaire :

Primitive, intégrale, unité d'aire,

•Savoir-faire :

- sf1 : Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale,
- sf2 : Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive,
- sf3 : Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties,
- sf4 : Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction.
- sf5 : Calculer l'aire entre deux courbes.
- sf6 : Étudier une suite d'intégrales.

•Vidéos

- Cours :
  Cours

- Démonstrations :

  Integrale et primitive | Théorème fondamental | Intégration par partie

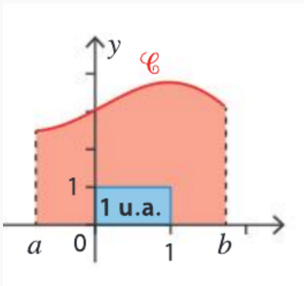
Cours : Intégrale d'une fonction continue positive

Définition — Unité d'aire

Soit un repère orthogonal (O ; OI ; OJ) et soit K le point de coordonnées (1 ; 1). L'aire du rectangle OIKJ est appelée unité d'aire du repère et est notée $u.a.$

Définition — Intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire, est appelée intégrale de a à b de la fonction f. Elle est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



Remarque

Les notations $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ sont équivalentes (i.e. la variable de la fonction est muette)

Théoreme — Primitive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. et F la fonction définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

La fonction F est **la** primitive de f sur $[a;b]$ qu's'annule en a

Propriété

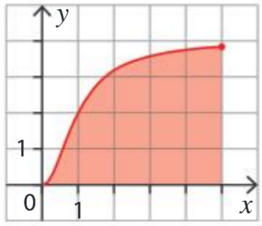
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

On a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Ce nombre peut aussi se noter $[F(t)]_a^b$

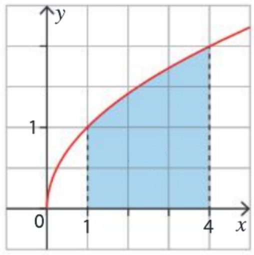
Exercice 1 ★

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 5]$ dont la représentation graphique se trouve ci-contre.
A l'aide de la représentation graphique donnée un encadrement de $\displaystyle\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$



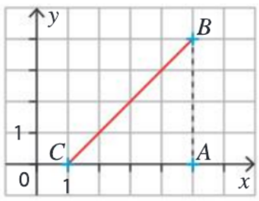
Exercice 2 ★

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 5]$ dont la représentation graphique ce trouve ci-contre.
A l'aide de la représentation graphique donnée un encadrement de $\displaystyle\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$



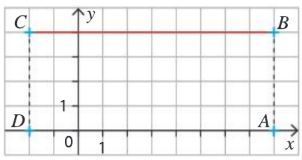
Exercice 3 ★

Soit f la fonction définie sur $[1 ; 5]$ par $f(x) = x - 1$. Déterminer graphiquement $\displaystyle\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$



Exercice 4 ★

Soit f la fonction définie sur $[-2 ; 8]$ par $f(x) = 4$.



Déterminer graphiquement $\int_{-2}^5 f(x)\mathrm{d}x$

Exercice 5 ★

Soit f la fonction définie sur $[-4 ; 1]$ par $f(x) = -x^2 - 3x + 4$.

1. Étudier le signe de f sur $[-4 ; 1]$.
2. Déterminer, en unité d'aire, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f, la droite d'équation $x = -4$ et la droite d'équation $x = 1$.

Cours : Intégrale d'une fonction continue

Définition — Intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Soit F une primitive de f sur $[a;b]$
On a $\int_a^b f(t) = F(b) - F(a)$ aussi noté $[F(x)]_a^b$

Remarque

Le réel $\int_a^b f(t)$ ne dépend pas de la primitive choisie pour f

Propriété — Propriétés algébriques

- $\int_a^a f(t) = 0$
- $\int_a^b f(t) = -\int_b^a f(t)$
- $\int_a^b f(t) + \int_b^c f(t) = \int_a^c f(t)$
- Soit k un réel fixé, $\int_a^b kf(t) = k\int_a^b f(t)$
- $\int_a^b f(t) + g(t) = \int_a^b f(t) + \int_a^b g(t)$

Propriété — Inégalités

- si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) \geq 0$
- si $f \geq g$, alors $\int_a^b f(t) \geq \int_a^b g(t)$

Propriété — Parité

Soient f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 et a un réel appartenant à I

1. Si f est paire, alors $\int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx$
2. Si f est impaire, alors $\int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^0 f(x)dx$

Propriété — Intégration par partie

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u et v soient continues sur I et a et b deux réels appartenant à I. On a :

$$\int_a^b u'(t)\times v(t)dt = [u(t)v(t)] - \int_a^b u(t)\times v'(t)dt$$

Exercice 6 ★

Calculer les intégrales ci-dessous :

1. $I = \displaystyle\int_{-4}^{3} \left(x^3 - x\right) \mathrm{d}x.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \pi\,(\pi x)\,\mathrm{d}x.$
3. $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\mathrm{d}x.$

Exercice 7 ★

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \left(x^2 + x\right)\ln(x)$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto x + 1 + (2x+1)\ln(x)$ sur $[1 ; 2]$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 8 ★

On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$.

1. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$. Calculer J.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire la valeur de I

Exercice 9 ★

1. Soit $f : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^x$. En utilisant une intégration par partie, calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.
2. Soit $g : x \mapsto 4\ln(x)$. En utilisant une integration par partie, calculer $\displaystyle\int_1^5 g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 10 ★

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi} x\sin(x)x$
2. $\int_0^1 x\mathrm{e}^x x$
3. $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)x$

Cours : Intégrale d'une fonction continue

•Aire

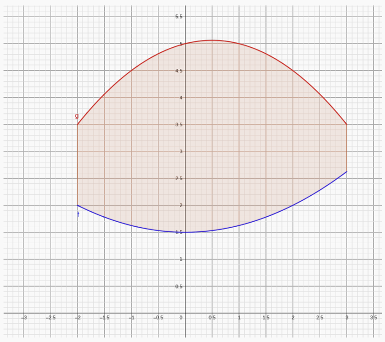
Propriété — Aire

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aire, est égale à $\int_a^b(-f(x))\mathrm{d}x$

Propriété — Aire entre 2 courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\ a;\ b\ ]$ telles que $f \leq g$ sur $[a;b]$ Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal. L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, exprimée en <u>unité d'aire</u>, est égale à :

$$\int_a^b(g(x)-f(x))\mathrm{d}x$$



•Valeur moyenne

Définition — Valeur moyenne

Soient deux réels a et b tels que $a<b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$.
On appelle `valeur moyenne` de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ le nombre réel :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Exercice 11 ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2-x+2$. On a tracé ci-contre sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 0,8 cm.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=(x^2-1)(x-2)$
2. Calculer l'aire de la partie colorée en centimètre carré.

Exercice 12 ★

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^2-x-12 \text{ et } g(x)=4x-16$$

.

1. Déterminer le signe de $f(x)-g(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire, en unité d'aire d'un repère orthonormé, l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations :
   (a) $x=5$ et $x=6$;
   (b) $x=2$ et $x=3$.

Exercice 13 ★

On considère les fonctions f et g, définies sur $[1\ ;\ 3]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g(x)=2-x$, représentées ci-contre dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Déterminer le signe de $f(x)-g(x)$ sur $[\ 1\ ;\ 3]$
2. En déduire le calcul de l'aire du domaine délimité par ces deux courbes et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$, en centimètre carré.

Exercice 14 ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+6x$

1. Déterminer sa valeur moyenne $\mathscr{D}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$

Exercices

Exercice 15 ★

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (2x^2 - x + 1)e^{-x}$. Calculer $h'(x)$
2. En déduire la valeur moyenne sur l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ;\ 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = (2x^2 + 5x - 2)e^{-x}$ En donner une valeur approchée au millième

exo