Exercice 1 ★

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\mathrm{d}x$$

.

1. Calculer I_0.

Correction

$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-0x} \sin(x)\mathrm{d}x$

$I_n = \int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$

$I_n = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}$

$I_n = -\cos(\pi) - (-\cos(0))$

$I_n = 1 + 1$

$I_n = 2$

2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.

Correction

$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout x, tel que $0 \leq x \leq \pi$:

$0 \leq \sin(x)$

$0 \leq \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)$ comme $\mathrm{e}^{-nx} > 0$

Donc :

$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x \geq 0$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

Correction

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \left(\mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\right)\mathrm{d}x$

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \left(\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx}\right) \sin(x)\mathrm{d}x$

Pour tout $x \in [0\ ;\ \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc $\left(\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx}\right)\sin(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx}$.

Étudions le signe de $\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx}$

$\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-nx-x} - \mathrm{e}^{-nx}$

$\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-nx} - \mathrm{e}^{-nx}$

$\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x} - 1)\,\mathrm{e}^{-nx}$

$\mathrm{e}^{-(n+1)x} - \mathrm{e}^{-nx} = (\mathrm{e}^{-x} - 1)\,\mathrm{e}^{-nx}$

Ainsi sur $[0\ ;\ \pi]$:

$0 \leq x$

$-x \leq 0$

$e^{-x} \leq e^0$ car e^x est croissante sur $[0\,;\,\pi]$.

$e^{-x} \leq 1$

$e^{-x} - 1 \leq 0$

$(e^{-x} - 1) \leq 0$

$(e^{-x} - 1)\,e^{-nx} \leq 0$

$\left((e^{-x} - 1)\,e^{-nx}\right) \leq 0$

(c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

Correction

Comme $I_{n+1} - I_n \geq 0$, la suite (I_n) est décroissante.
De plus (I_n) est minorée par 0, ainsi la suite (I_n) converge.

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^n e^{-nx}\,dx$$

Correction

$I_n \leq \int_0^n e^{-nx}\,dx$

$I_n \leq \int_0^n e^{-nx}\,dx$

$-1 \leq \sin(x)dx \leq 1$

$nx \leq -nx\sin(x) \leq nx$ car $-nx \leq 0$ sur $[0\,;\,\pi]$

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^n e^{-nx}\,dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

Correction

Comme :

$\left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)' = -n \times \frac{e^{-nx}}{-n}$

$\left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)' = e^{-nx}$

$\frac{e^{-nx}}{-n}$ est une primitive de e^{-nx}

$\int_0^n e^{-nx}\,dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{\pi}$

$\int_0^n e^{-nx}\,dx = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{e^{-n\times 0}}{-n}$

$\int_0^n e^{-nx}\,dx = \frac{e^{-n\pi}}{-n} - \frac{1}{-n}$

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{e^{-n\pi}-1}{-n}$$
$$\int_0^n \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{-e^{-n\pi}+1}{n}$$

(c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

Correction

D'une part :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

D'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} -n\pi = -\infty$$

En posant $N = -n\pi$

$$\lim_{N\to-\infty} -e^{N} = 0$$

Par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} -e^{-n\pi} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} -e^{-n\pi}+1 = 1$$

Finalement par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-e^{n\pi}+1}{n} = 0$$

$$0 \le I_n \le \frac{-e^{n\pi}+1}{n}$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

4. (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \ge 1$:

$$I_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \text{ et } I_n = \frac{1}{n}J_n$$

Correction

Méthode 1 :

$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)$ est de la forme $u'v$, avec

- $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}$
- $u'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
- $v(x) = \sin(x)$
- $v'(x) = \cos(x)$

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{-n}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}J_n$$

Méthode 2 :

$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)$ est de la forme $u'v$, avec

- $u(x) = -\cos(x)$
- $u'(x) = \sin(x)$
- $v(x) = \mathrm{e}^{-nx}$
- $v'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx}$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \left[-e^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-n\pi}\cos(\pi) - \left(-\mathrm{e}^{-n\times 0}\cos(0)\right) - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

Correction

$$\frac{1}{n}J_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n$$
$$\frac{1}{n}J_n + nJ_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1$$
$$\frac{1+n^2}{n}J_n = \mathrm{e}^{-n\pi} + 1$$
$$J_n = \frac{n\left(\mathrm{e}^{-n\pi}+1\right)}{1+n^2}$$

Comme $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$

$$I_n = \frac{1}{n} \times \frac{n\left(\mathrm{e}^{-n\pi}+1\right)}{1+n^2}$$
$$I_n = \frac{\left(\mathrm{e}^{-n\pi}+1\right)}{1+n^2}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
   Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

Correction

```python
1 from math import *
2 
3 def seuil() :
4     n = 0
5     I = 2
6     while I >= 0.1:
7         n=n+1
8         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
9     return n
```