Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\mathrm{d}x, \qquad J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\mathrm{d}x$$

.

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^{n} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{n} \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \text{ et } I_n = \frac{1}{n}J_n$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.
   Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2
3 def seuil() :
4     n = 0
5     I = 2
6     ...
7         n=n+1
8         I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
9     return n
```