Exercices de type bac

Exercice 1 Métropole 07 juin 2021

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

   (a) Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
   On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

   (b) À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

   (a) Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

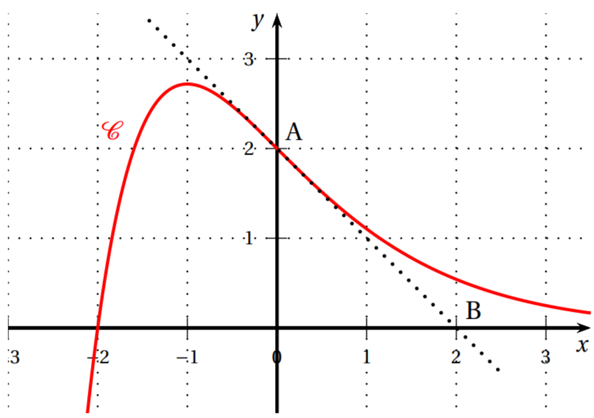
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

   (c) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

Exercice 2 Polynésie 2021

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) : $y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
   On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
   On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
   (b) Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?

Exercice 3 Asie 07 juin 2021

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   (c) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(t)=\frac{1}{g(t)}=\frac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t)=\dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t)=\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y'=0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0)=\dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

Exercice 4 Asie 08 Juin 2021

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0=1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1}=u_n+0,05\,(20-u_n)\ \text{pour tout entier naturel}\ n.$$

1. Vérifier que $u_1=1,95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,95u_n+1$.

   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n=20-u_n$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=20-19\times0,95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
   Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?