14 Primitive & équation différentielle

•Vocabulaire :

Primitive & équation différentielle

•Savoir-faire :

- Déterminer une primitive,
- Résoudre une équation différentielle de type $y' = ay$, $y' = ay + b$, $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

•Vidéos

Cours :

Primitives

Equations différentielles

Démonstrations :

Primitive diffère d'une constante

Résolution de $y' = ay$

Cours : Primitive

Définition — Primitive

Une primitive d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque

Montrer qu'une fonction F est une primitive de f sur I, consiste donc à vérifier que le dérivée de F est bien f.

Propriété — Existence

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et G une primitive de f sur I. Les primitives de f sur I sont les fonctions F définies sur I par $F(x) = G(x) + C$, où C est une constante réelle.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Propriété — fonctions usuelles

f	F	Intervalle
a (constante réelle)	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z}, n < -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0\,;\,+\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Exercice 1 ★

Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par

$$F(x) = x\ln(x) - x$$

On admet que F est dérivable sur $]0;+\infty[$
Vérifier que F est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$

Exercice 2 ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 3x + 7$$

1. Vérifier que la fonction G, définie par $G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 7x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 2.

Exercice 3 ★

On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$ et $F(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$

1. Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2. En déduire la primitive G de f telle que $G(0) = 5$.

Exercice 4 ★

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x - 1)e^{2x}$$

1. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F : x \longmapsto (ax + b)e^{2x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Cours : Primitive et opération

Définition — Primitive

Soient f et g deux fonctions admettant respectivement les fonctions F et G comme primitives sur un intervalle I

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I
- Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Quels que soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

Remarque

Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions

Propriété — fonctions usuelles

f	F	Intervalle
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$ ou $u(x) < 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'\mathrm{e}^u$	e^u	$\mathbb{R}$
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in J$

Exercice 5 ★

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ et $I =]0\ ;\ +\infty[$

Exercice 6 ★

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^6 + 3x^5 - \frac{3}{x}$ et $I =]0\ ;\ +\infty[$
3. $f(x) = -6\cos(x) + 5\mathrm{e}^x + \frac{1}{x^3}$ et $I = \mathbb{R}$

Exercice 7 ★

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{e}^x$$

.

1. Donner une primitive de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire toutes les primitives de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Déterminer la primitive F de la fonction f telle que $F(1) = 0$

Exercice 8 ★

Une fusée décolle verticalement du sol à l'instant t = 0.
Lors des deux premières minutes de vol, sa vitesse (en $m \cdot s^{-1}$) à l'instant t (en s) est donnée par la formule $v(t) = 0,06t^2 + 0,8t$ et on note $d(t)$ la distance (en m) qu'elle a parcourue.

1. Sachant que d est une primitive de la fonction v, déterminer l'expression de $d(t)$
2. À quelle distance de la Terre se trouve la fusée après deux minutes de vol ?

Cours : Equations différentielles

Définition — Solution

- Une équation différentielle est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée.
- Une solution d'une équation différentielle est une fonction qui vérifie cette égalité.

Propriété — $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

Propriété — $y' = ay + b$

Soient a et b deux nombres réels non nuls. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' = ay + b$$

- (E) admet une unique solution particulière constante, qui est la fonction $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.
- Quels que soient les nombres réels x_0 et y_0, l'équation (E) admet une unique solution g vérifient la condition initiale $g(x_0) = y_0$

Propriété — $y' = ay + f$

Soient a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} + g(x)$, où C est une constante réelle.

Exercice 9 ★

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée.

1. $y' = y$ et $f(0) = 1$
2. $5y' = y$ et $f(1) = 0$
3. $y' + y = 0$ et $f'(1) = 2$

Exercice 10 ★

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{10}}$ et $y' = 0,1y$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{3x-2} + 5$ et $y' = 3y - 15$

Exercice 11 ★

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale donnée.

1. $y' = 3y - 6$ et $f(0) = -1$
2. $y' = -5y - 4$ et $f(1) = 0$
3. $y' = y - 1$ et $f(2) = 1$

Exercice 12 ★

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y' = 0,8y + 1,6$$

1. Résoudre sur R l'équation (E)
2. Vérifier que toutes les solutions de (E) admettent une asymptote horizontale que l'on précisera.

Exercice 13 ★

Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f définie sur R est une solution particulière de l'équation (E).

1. $f(x) = \mathrm{e}^{-5x+1} + \dfrac{3}{5}$ et $(E) : y' = -5y + 3$
2. $f(x) = 2x + 2$ et $(E) : y' = -2y + 4x + 6$
3. $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$ et $(E) : y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$