12 Logarithme népérien

•Vocabulaire :

Logarithme népérien

•Savoir-faire :

- ✔ Étudier une fonction logarithmique,
- ✔ Utiliser les propriétés algébriques du logarithme,
- ✔ Résoudre une inéquation à l'aide du logarithme.

•Vidéos

- Cours :
  https ://www.youtube.com/watch?v=VJns0RfVWGg
- Utiliser les formules algébriques du logarithme :
  https ://www.youtube.com/watch?v=m-LJjU7trXo
- Utiliser les formules algébriques du logarithme :
  https ://www.youtube.com/watch?v=_fpPphstjYw

Cours : Fonction logarithme

Définition

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$, d'inconnue x, admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. Cette solution se note $x = \ln(a)$ et s'appelle le logarithme népérien de a

La fonction qui, à tout réel $a > 0$, associe le réel $\ln(a)$ s'appelle la fonction logarithme népérien. C'est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $]0;+\infty[$ et elle est notée $\ln$

Propriété — Graphique

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x

Propriété

- Pour tout réel $b > 0$ et pour tout réel a, $e^a = b \Longleftrightarrow a = \ln(b)$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
- Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$
- Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$

Propriété — Relation fonctionnelle

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

Propriété — Conséquences

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$

- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
- Pour tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}ln(x)$

Exercice 1 ★

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes.

1. $f(x) = \ln(3x - 5)$
2. $g(x) = \ln(-x^2 - 5x + 6)$

Exercice 2 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 4$
2. $e^{2x+7} = 2$
3. $\ln(x) = 5$
4. $\ln(3x + 5) = 1$

Exercice 3 ★

1. Démontrer que :
   $\ln(8) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(16)$ est un nombre entier.
2. Démontrer que $\ln(48) - 3\ln(2) = \ln(6)$
3. Démontrer que $\ln(\sqrt{5} - 1) + \ln(\sqrt{5} + 1) = 2\ln(2)$
4. Calculer $\ln(e^2\sqrt{e})$

Exercice 4 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $-5e^x + 10 = 0$
2. $7 - e^{5x-2} = 0$
3. $e^{-3x} = 8$
4. $e^x(e^x - 9) = 0$

Exercice 5 ★

Exprimer en fonction de $\ln(3)$ chacun des nombres suivants.

1. $\ln(9)$
2. $\ln(3e)$
3. $\ln(3^{-10})$
4. $\ln(6) - \ln(2)$
5. $\ln(27\sqrt{e})$

Cours : Variation & limites

•Variation

Propriété — Dérivée

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$

$$\ln(x)=\frac{1}{x}$$

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout x appartenant à I, $u(x)>0$. La fonction $\ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$\left(\ln(u)\right)'=\frac{u'}{u}$$

Propriété — Variation

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

Propriété — Conséquence

1. $\ln(a)=\ln(b)\Longleftrightarrow a=b$
2. $\ln(a)<\ln(b)\Longleftrightarrow a<b$
3. $\ln(x)<0\Longleftrightarrow 0<x<1$
4. $\ln(x)>0\Longleftrightarrow x>1$

•Limites

Propriété — limites

- $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)=+\infty$

Propriété — Croissance comparée

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$

Pour $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^n)}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\ln(x)=0$

Exercice 6 ★

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

Exercice 7 ★

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5x+4)>9$

Exercice 8 ★

Soient g et h les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{\ln(x)}{x+1}$ et $h(x)=\frac{1}{x}+ln(x)$

1. Étudier la limite de $g(x)$ en $+\infty$
2. Étudier la limite de $h(x)$ en 0.

Exercice 9 ★

Déterminer les limites en -1 et $+\infty$ de la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\ln(\frac{1}{x+1})x$

Exercice 10 ★

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0} -7\ln(x)+6$
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(-x+3)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(\frac{3x+1}{x})$
4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(\frac{x+1}{x})$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\frac{1}{x})$

Exercice 11 ★

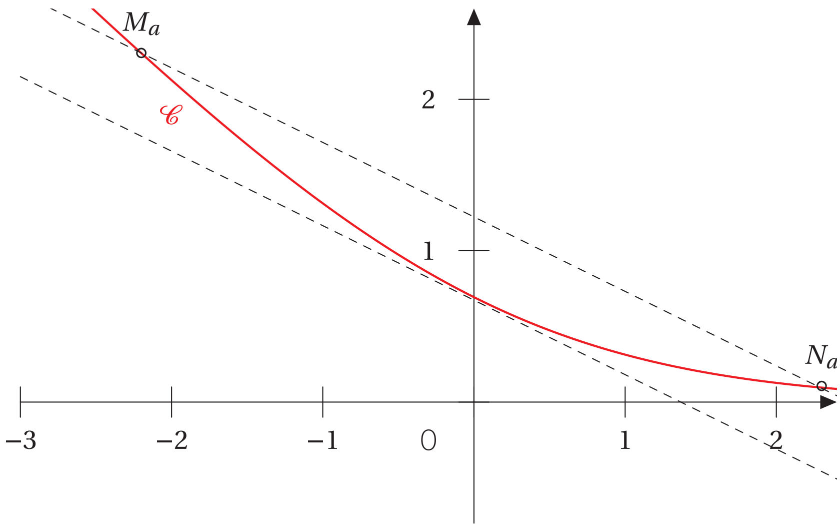
Résoudre dans $\mathbb{N}$, les inéquations :

1. $2,4^n<1280$
2. $5^n-5000>25000$
3. $1500\times 0,9^n<560$
4. $200\times 0,75^n<1$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé .
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.



1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.
   (a) Déterminer une équation de la tangente T_0.
   (b) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\left(-a\,;\,f(-a)\right)$ et $N_a\left(a\,;\,f(a)\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   (b) En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.