11 Dénombrement & combinaison

•Vocabulaire :

Factorielle, k-uplet, arrangement, combinaison, permutation.

•Savoir-faire :

- ✔ Connaître le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments
- ✔ Déterminer un nombre d'arrangements ou de permutations d'un ensemble à n éléments
- ✔ Déterminer un nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments
- ✔✔ Définir la méthode de dénombrement correspondant à un problème donné
- ✔✔ Utiliser le principe additif ou multiplicatif suivant le problème à résoudre.

•Vidéos

- Cours
- Choisir entre k-uplet, arrangement, permutation et combinaison

Cours : Principe multiplicatif & additif

Définition — Cardinal

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini.
Le nombre n d'éléments de E est appelé cardinal de E, noté $Card(E)$.

Définition — Complémentaire

Soient A une partie d'un ensemble E fini et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.On a :
$Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$

Propriété — Principe additif

Soient $A_1, A_2, ..., A_p$, p ensembles finis deux à deux **disjoints**.
On a : $Card(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = Card(A_1) + Card(A_2) + \cdots + Card(A_n)$

Définition — Produit cartésien

E et F sont deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x ; y) avec $x \in E$ et $y \in F$

Propriété — Cadrinalité

E et F sont deux ensembles non vides **fini**.

Lorsque les ensembles E et F sont finis, $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

Définition — Produit cartésien

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $E_1, E_2, ..., E_k$, k ensembles non vides.
L'ensemble de toutes les listes ordonnée $(x_1; x_2; ...; x_k)$, avec $x \in E_i$ pour i allant de 1 à k, est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_k$

Propriété — Cardinalité

Lorsque les ensembles $E_1, E_2, ..., E_k$ sont finis :
$Card(E_1 \times E_2 \times ... \times E_k) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times ... \times Card(E_k)$

Exercice 1 ★

Pour chacune des questions suivantes, indiquer le principe de dénombrement à utiliser et effectuerle calcul.

1. La carte d'un restaurant propose cinq entrées différentes et trois plats. Paula, ne souhaitant pas prendre les deux, hésite entre une entrée ou un plat. Combien a-t-elle de choix possibles ?
2. Dans le même restaurant, la carte propose également trois desserts. Jules décide de choisir le menu« entrée, plat et dessert ». Combien de menus différents Jules peut-il composer ?
3. Dans une classe de 35 élèves, 17 étudient l'allemand, 15 l'espagnol et 8 aucune de ces deux langues. Combien d'élèves étudient l'allemand et l'espagnol ?

Exercice 2 ★

1. On considère les ensembles $A = \{3; 2; 1\}$ et $B = \{0; 3\}$.
   Déterminer $A \times B$ et $B \times A$
2. On considère l'ensemble $C = \{(6;2); (6;4); (5;2); (5;4); (10;2); (10;4); (3;2); (3;4)\}$
   Écrire C sous la forme d'un produit cartésien de deux ensembles.
3. On considère les ensembles $E = \{a\}$, $F = \{b; d\}$, $G = \{a; b; c\}$. Déterminer $G \times E \times F$

Exercice 3

On considère deux parties A et B d'un ensemble E telles que : $Card(E) = 70, Card(A) = 27 et Card(B) = 30$
Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre d'éléments n'appartenant pas à $A \cup B$.

1. Si $A \cap B =$
2. Si $A \in B$.
3. Si $Card(A \cap B) = 20$

Cours : Arrangement avec remise

i Dans cette partie, on s'interressera aux situations s'apparentant à un tirage **avec remise** où **l'ordre** des éléments est important (i.e. $(1\ ;\ 2) \neq (2\ ;\ 1)$).

Définition — k-uplet

Soit k un entier naturel non nul et E un ensemble non vide.
Un k-uplet d'éléments de E est un élément du produit cartésien :
$E^k = E \times E \times \ldots \times E$ (k-facteurs)

Propriété — Nombre de k-uplet

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de k-uplets de E est n^k , soit $Card(E) = n^k$

Exercice 4 Exercice modèle

On dispose de trois boîtes notées A, B et C et cinq jetons de couleurs différentes que l'on doit ranger dans les boîtes. On note $T = \{A; B; C\}$ l'ensemble des boîtes.
Combien de rangements sont-ils possibles ?

Solution :
Pour chaque jeton, on a 3 choix (A,B ou C). La situation s'apparente à un tirage avec remise dont l'ordre est important. Il s'agit donc de savoir combien on peut former de 5-uplets avec l'ensemble $E = \{A; B; C\}$ de 3 éléments.
$Card(E^5) = 3^5 = 243$

Propriété

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

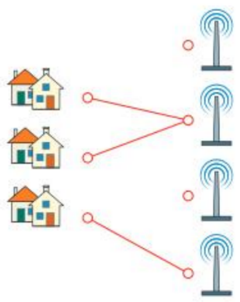
$$n(n-1)(\ldots)(n-k+1) \quad (k - facteurs)$$

Exercice 5 ★

Combien de nombres à 6 chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?

Exercice 6 ★

Trois villages peuvent être rattachés à une des quatre antennes-relais du secteur.
Le schéma suivant représente une liaison possible entre les villages et les antennes.



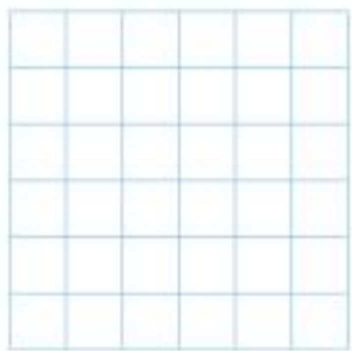
Combien y a-t-il de liaisons possibles, sachant que plusieurs villages peuvent être rattachés à la même antenne ?

Exercice 7 ★

Le digicode d'un immeuble est composé des cinq chiffres de 0 à 4 et des lettres A, B et C.
Le code est composé de 5 chiffres suivis de 2 lettres.
Combien y a-t-il de codes possibles ?

Exercice 8 ★

On doit remplir la grille ci-contre avec des 0 ou des 1.



Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

Cours : Arrangement et permutation

i Dans cette partie, on s'interressera aux situations s'apparentant à un tirage **sans remise** où **l'ordre** des éléments est important ($(1\ ;\ 2) \neq (2\ ;\ 1)$).

Définition — Factorielle

On appelle `factorielle` n (ou n `factorielle`) le nombre noté $n!$ défini par : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

Définition — Arrangement

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. . Les k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E sont des arrangements sans remise.

Propriété — Nombre d'arrangements

Soit n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $1 \leq k \leq n$.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est :

$$n(n-1)(\dots)(n-k+1) = \frac{n!}{n-k}$$

Exercice 9 Exercice modèle

On dispose de cinq boîtes notées A, B, C, D et E et trois jetons de couleurs différentes que l'on doit ranger dans les boîtes. On ne peut mettre qu'un jeton par boite. Combien de rangements sont-ils possibles ?

Solution : La situation s'apparente à un tirage sans remise dont l'ordre est important.Il s'agit donc de savoir combien on peut former de 3-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $E = \{A; B; C; D; E\}$ de 5 éléments.
$Card(A) = 5 \times (5-1) \times (5-2) = 60$

Définition — Permutation

On appelle **permutation** d'un ensemble E à n éléments tout n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Propriété — Nombre de permutations

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est défini par :
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

Exercice 10 ★

1. Combien de mots de 4 lettres distinctes peut-on écrire avec les lettres $\{a; b; c; d\}$?
2. Combien de mots de 6 lettres distinctes peut-on écrire avec les lettres $\{a; b; c; d; e; h\}$?
3. Combien de mots de 3 lettres distinctes peut-on écrire avec les lettres $\{a; b; c; d; e; h\}$?

Exercice 11

Dans une pièce de théâtre, il y a six rôles à pourvoir, qui peuvent être joués par n'importe lesquelles des douze personnes de la troupe.

Combien de distributions possibles des rôles peut-on avoir ?

Exercice 12 ★

Une anagramme est un mot (ayant un sens ou non) écrit en modifiant l'ordre des lettres du mot d'origine.

Écrire les anagrammes du mot « lire »

Exercice 13 ★

Simplifier :

1. $\dfrac{6!}{3!}$
2. $\dfrac{9!}{11!}$
3. $\dfrac{20!}{3! \times 5! \times 2!}$
4. $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

Exercice 14 ★

Une urne contient 15 boules indiscernables au toucher. Il y a trois boules blanches, numérotées de 1 à 3, cinq boules rouges numérotées de 1 à 5 et sept boules vertes numérotées de 1 à 7. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. On note B l'ensemble des boules blanches, R celui des boules rouges et V celui des boules vertes.
   Donner le nombre de tirages simultanés de trois boules :
   (a) dans B ; dans R ; dans V.
   (b) En déduire le nombre de tirages unicolores dans l'urne.

Cours : Combinaison

i Dans cette partie, on s'interressera aux situations s'apparentant à un tirage **sans remise** où **l'ordre** des éléments n'est pas important ($1\ ;\ 2 \neq 2\ ;\ 1$).

Définition — sous-ensemble

Soit E un ensemble.
Dire qu'un ensemble F est une partie de E (ou que F est un sous-ensemble de E,ou que F est inclus dans E) signifie que tous les éléments de F sont éléments de E.
On note alors $F \in E$.

Remarques

- Contrairement au k-uplet l'ordre de élément n'a pas d'importance
- Pour tout ensemble E, $E \in E$ et $\in E$

Propriété — Cardinalité de sous-ensembles

Soit n un entier naturel.
Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal au nombre de n-uplets de l'ensemble 0; 1 , c'est-à-dire 2^n

Définition — Combinaison

Soients n et k deux entiers naturels tels que $0 < k < n$ et E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle combinaison de k éléments de E toute partie de E ayant k éléments.

Propriété — k parmi n

Soients n et k deux entiers naturels tels que $0 < k < n$. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments, noté $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est donné par la formule :
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \dfrac{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}$

Exercice 15 ★

Au poker, on appelle « main » tout ensemble de cinq cartes.On considère un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant l'as de pique ?

Exercice 16

On considère l'ensemble $E = 1;2;3;4$

1. Déterminer toutes les parties de l'ensemble E.
2. Combien y en a-t-il ? Quelle formule peut-on vérifier ?
3. Déterminer le nombre de parties à deux éléments de l'ensemble E. En déduire $\binom{k}{n}$

Exercice 17 ★

1. À l'aide de la calculatrice, calculer $\binom{4}{12}$ puis interpréter cette valeur en termes de nombre de parties d'ensemble.
2. Même question pour $\binom{2}{6}$ et 1010

Exercice 18 ★

Lors d'une course hippique, on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée. On parle alors de quinté. 15 chevaux sont au départ et chaque cheval est numéroté de 1 à 15.
Combien y a-t-il de quintés différents :

1. en tenant compte de l'ordre ?
2. sans tenir compte de l'ordre ?

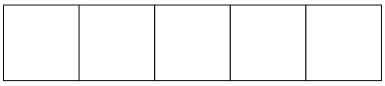
Exercice 19 ★

Après avoir précisé s'il s'agit de k-uplets, de permutations ou de combinaisons, dénombrer :

1. les rencontres de football possibles lors d'un tournoi opposant 16 équipes ;
2. les classements (sans ex æquo) possibles à l'arrivée d'une course de 100 mètres où huit athlètes sont alignées ;
3. les mots de cinq lettres différentes que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet ;
4. les façons de disposer six jetons sur un damier de 64 cases.

Exercice 20 ★

On considère le motif suivant.



Combien y a-t-il de façons de colorier le motif :

1. à l'aide de quatre couleurs ?
2. à l'aide de huit couleurs, sans utiliser deux fois la même couleur ?
3. à l'aide de trois couleurs sans que deux cases adjacentes ne soient de la même couleur ?
4. en noir et blanc, avec exactement trois cases blanches ?

Exercice 21 ★

Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. Démontrer que $n\binom{p-1}{n-1} = p\binom{p}{n}$

Exercice 22 ★

En informatique, un octet est une liste de huit chiffres constituée uniquement de 0 et de 1.

1. Combien d'octets différents peut-on former ?
2. Calculer le nombre d'octets différents commençant par 1 et finissant par 0.
3. Dénombrer le nombre d'octets comportant exactement :
   (a) une fois le chiffre 1 ;
   (b) cinq fois le chiffre 1.
4. Combien de messages de cinq octets différents peut-on écrire ?

Exercice 23 ★

L'espèce humaine possède 23 paires de chromosomes. Chaque cellule reproductrice (aussi appelée gamète) contient un chromosome de chaque paire choisi de façon aléatoire. Lors de la reproduction, l'ovule de la mère et le spermatozoïde du père fusionnent pour former une cellule appelée zygote qui, par divisions successives, engendrera un embryon. Le zygote contient ainsi 23 paires de chromosomes et chaque paire est constituée d'un chromosome provenant de la mère et d'un chromosome provenant du père.

1. Combien un être humain peut-il produire de gamètes différents ?
2. Combien de zygotes différents un couple peut-il engendrer ?

Exercice 24 ★

Un numéro de téléphone français est constitué de dix chiffres dont le premier est 0 et les neuf autres sont quelconques.

1. Combien y a-t-il de numéros possibles ?
2. Combien y a-t-il de numéros possibles commençant par 06 ?
3. Calculer le nombre de numéros contenant :
   (a) les dix chiffres ;
   (b) exactement trois fois le chiffre 6.

Exercice 25 ★

Une urne contient quatre boules blanches numérotées de 1 à 4, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 1 à 2. On tire simultanément trois boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule noire ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro impair ?