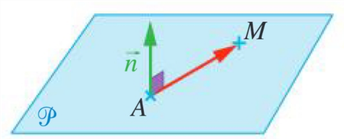
Caractérisation des points d'un plan

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
Soient A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 .$$

Remarque Un plan peut être défini par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.



Équation cartésienne d'un plan

Soient a, b et c trois réels non tous nuls.

Propriété et définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de l'espace dont les cordonnées vérifient l'équation :

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0},$$

où $d = -ax_A - by_A - cz_A$.
Cette équation est une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

Remarque Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point de ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Propriété

Soit d un réel. L'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ dont les coordonnées vérifient l'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque Un plan peut être défini par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.

20 Intersection d'une droite et d'un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 5y + 2z + 1 = 0$ et la droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

2. Justifier qu'un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à l'intersection de $\mathcal{P}$ et Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que :

$$3(2-2t) - 5(5-3t) + 2(2t) + 1 = 0$$

3. En déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ.

20 Intersection de deux plans

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations cartésiennes respectives :

$$3x - 2y + z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 4x - 3z + 5 = 0$$

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

2. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite d'intersection des deux plans, où a, b et c sont trois réels non nuls simultanément.

a. Justifier que : $\begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 4a - 3c = 0 \end{cases}$

b. En déduire les coordonnées de $\vec{u}$ en fonction de c.

c. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ lorsque $c = 1$?

3. Déterminer les coordonnées d'un point $M(0\ ;\ y\ ;\ z)$ appartenant aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4. Déduire des questions précédents une représentation paramétrique de l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

21 Projeté orthogonal d'un point sur un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $4x + y + z - 3 = 0$ et le point $A(3\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A, notée Δ.

2. En déduire une représentation paramétrique de Δ.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre Δ et $\mathcal{P}$. Conclure.

22 Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

et $A(0\ ;\ 5\ ;\ 2)$ un point de l'espace.

1. Justifier que le point $H(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = t \end{cases}$

et $2(3 + 2t) - 3(10 - 3t) + (t - 2) = 0$.

2. Résoudre et conclure.

23

$ABCDEFGH$ est un cube.
K est le centre de gravité du triangle ACH, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes du triangle ACH.
Montrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (ACH) en K.