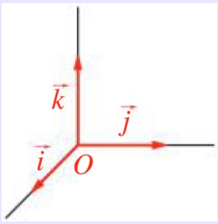
Produit scalaire dans une base orthonormée

Définitions

• Une **base orthonormée** de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1.
Autrement dit, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée signifie que :
$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ et
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.



• Un **repère orthonormé** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée.

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.
On a alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

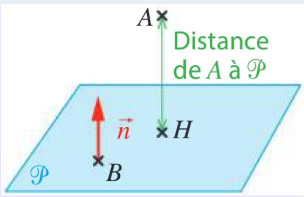
Corollaire

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$. On a alors
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Distance d'un point à un plan ou à une droite

Propriétés et définition

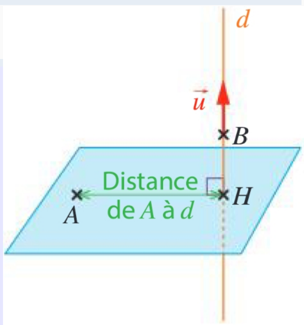
Soient A un point et $\mathcal{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\vec{n}$.
• Le projeté orthogonal H de A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point du plan $\mathcal{P}$ le plus proche de A.



• La distance AH est appelée **distance du point A au plan $\mathcal{P}$**, et on a : $AH = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

Propriétés et définition

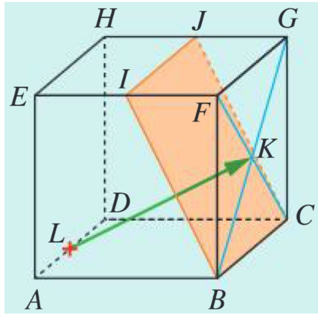
Soient A un point et d une droite passant par un point B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
• Le projeté orthogonal H de A sur la droite d est le point de la droite d le plus proche de A.



• La distance AH est appelée **distance du point A à la droite d**, et on a : $AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} \right\|$.

16 On se place dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.
1. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\14\\2\end{pmatrix}$.
Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
2. On considère les points $A(4 ; 2 ; 0)$, $B(6 ; 4 ; 2)$ et $C(12 ; 6 ; 0)$ Quelle est la nature du triangle ABC ?

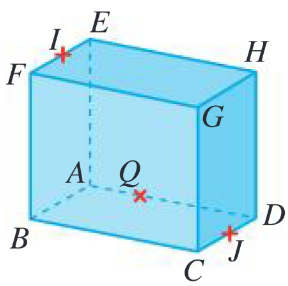
17 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1.
On note L, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[EF]$ et $[HG]$ et K le centre du carré $BCGF$.



1. Citer une base orthonormée de l'espace en utilisant des points de la figure.
2. Citer deux repères orthonormés de l'espace en utilisant des points de la figure.
3. On se place dans le repère de l'espace $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{LK}$ est normal au plan (IJB)
b. En déduire la distance du point L au plan (IJB).

18 On se place dans un repère orthonormé de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(3 ; 5 ; -4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\21\\20\end{pmatrix}$. Quelle est la distance du point $B(1; 5 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$?

19 On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ tel que $AB = 2$, $AD = 4$ et $AE = 3$.



Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[FE]$ et $[CD]$ Le point Q appartient au segment $[AD]$ et est tel que $AQ = 0{,}25\,AD$.
1. Calculer $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AJ}$. **2.** Calculer $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{IB}$.
3. Démontrer que les droites (IJ) et (FE) sont orthogonales.
4. Quel est le projeté orthogonal de I sur la droite (CD) ? Justifier.