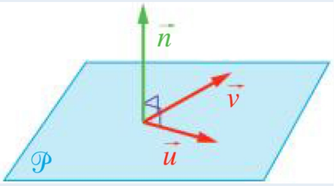
Vecteur normal à un plan

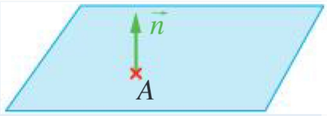
Définition

Soit $\mathscr{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathscr{P}$ s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.



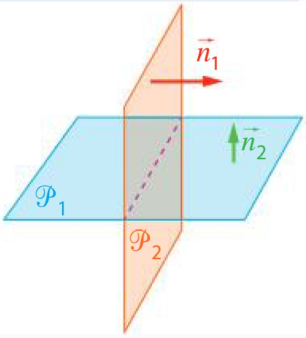
Propriété

Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.



Définition

Soient $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathscr{P}_1$ est **perpendiculaire** à $\mathscr{P}_2$ si $\vec{n}_1$ est orthogonal à $\vec{n}_2$.

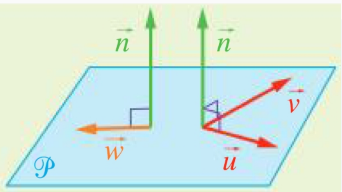


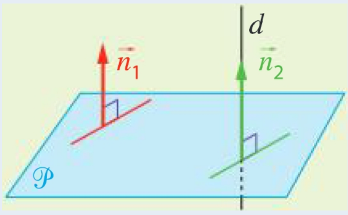
Remarques

- Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal à un plan est aussi un vecteur normal à ce plan.
- Si deux vecteurs sont normaux à un même plan, alors ils sont colinéaires entre eux.

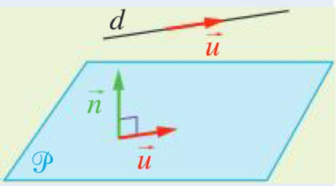
Propriétés

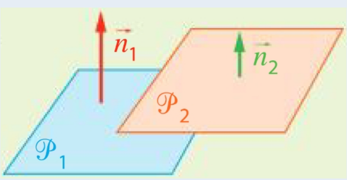
- Un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan.





- Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est colinéaire à un vecteur normal à ce plan.
- Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal à ce plan.





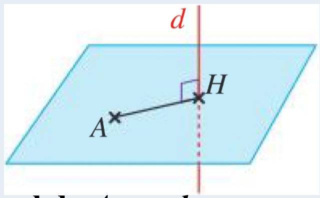
- Soient $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$. $\mathscr{P}_1$ est parallèle à $\mathscr{P}_2$ si et seulement si $\vec{n}_1$ est colinéaire à $\vec{n}_2$.

Projeté orthogonal d'un point

Soient A un point et d une droite de l'espace.

Définition

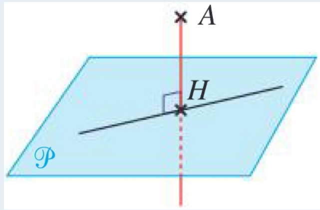
Il existe un unique plan passant par A et orthogonal à d. La droite d est alors sécante avec ce plan et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur d**.



Soient A un point et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

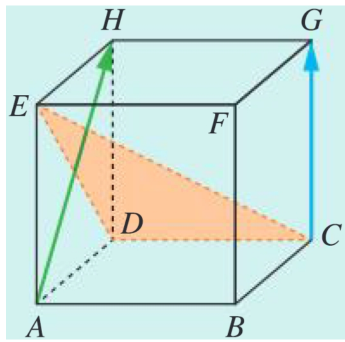
Définition

Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ est alors sécant avec cette droite et leur point d'intersection est appelé **projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$**.

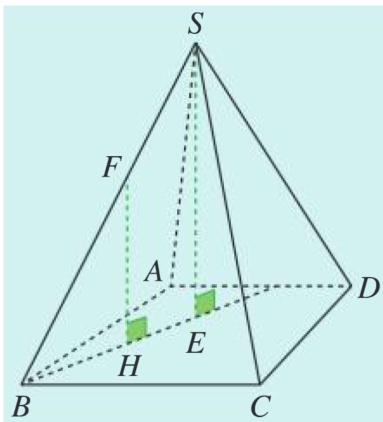


13 $ABCDEFGH$ est un cube.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{CG}$ est normal au plan (FGH).
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal au plan (EDC).



14 $SABCD$ est une pyramide.
E est le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC) et F est un point du segment $[SB]$.
Démontrer que la parallèle d à (SE) passant par F coupe la droite (BE) en un point H qui est le projeté orthogonal de F sur (ABC).



15 $ABCDEFGH$ est un cube.

1. Justifier que la droite (BG) est orthogonale à la droite (FC).
2. Démontrer que la droite (BG) est orthogonale à la droite (CD).
3. En déduire un vecteur normal au plan (FDC).
4. Démontrer que le projeté orthogonal du point B sur le plan (FDC) est le milieu du segment $[CF]$.