Orthogonalité de deux droites

Définition

Soient d et d' deux droites de l'espace. d et d' sont **orthogonales** si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

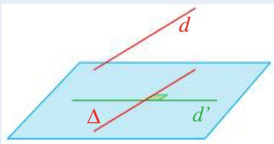
Propriété

Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement si tout vecteur directeur de d est orthogonal à tout vecteur directeur de d'.

Remarques • Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires. • Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si elles sont sécantes selon un angle droit. • Si deux droites sont perpendiculaires, alors elles sont orthogonales. La réciproque est fausse.

Propriétés

• Deux droites d et d' de l'espace sont orthogonales si et seulement s'il existe une droite Δ parallèle à d et perpendiculaire à d'.



• Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
• Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

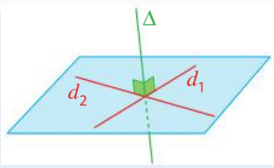
Orthogonalité d'un plan et d'une droite

Définition

Dans l'espace, soient $\mathscr{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux (ou perpendiculaires) si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Propriétés

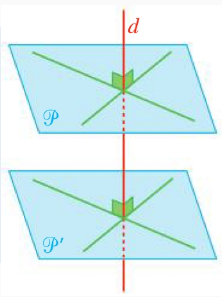
• Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



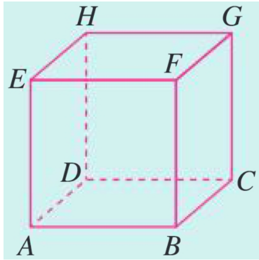
• Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.
• Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

Propriétés

• Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
• Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



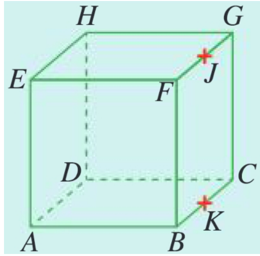
7 $ABCDEFGH$ est un cube.



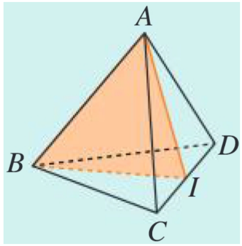
1. Montrer que les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.

2. Montrer que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

8 $ABCDEFGH$ est un cube.
Les points J et K sont les milieux respectifs des segments $[FG]$ et $[BC]$.
Démontrer que la droite (JK) est orthogonale au plan (ABC).



9 $ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).
Le point I est le milieu du segment $[CD]$



1. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan (ABI).

2. En déduire que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

10 On considère un cube $ABCDEFGH$

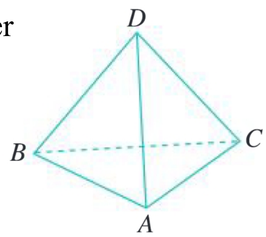
1. Justifier que la droite (FH) est perpendiculaire à la droite (EG).

2. a. Démontrer que $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$.

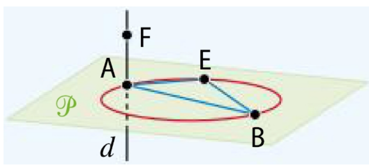
b. Que peut-on en déduire ?

3. Justifier que la droite (FH) est orthogonale au plan (EGC).

11 $ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).
Démontrer que les droites (BC) et (AD) sont orthogonales.



12 $\mathscr{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$ d'un plan $\mathscr{P}$ et d est la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par A.
Soit E un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B, et F un point de d distinct de A.



1. Justifier que les droites (AE) et (BE) sont perpendiculaires.

2. En déduire que la droite (BE) est perpendiculaire au plan (AEF).