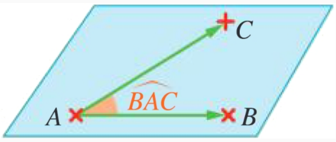
Extension du produit scalaire à l'espace

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le réel $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans un plan contenant les points A, B et C.

Remarque $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.

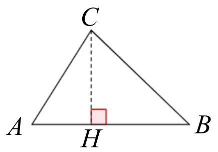


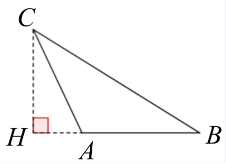
Propriétés

Propriétés

Soient A, B et C trois points de l'espace, B et C étant distincts de A.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens ;
  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.





Remarque En particulier, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
$\vec{u} \cdot \vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$ et est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un nombre réel.

Propriétés *Propriétés algébriques*

On a :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (bilinéarité)
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriétés *Formules de polarisation*

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Orthogonalité de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

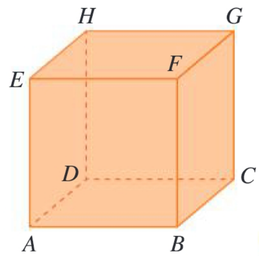
1 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$
Le point J est le milieu du segment $[DH]$
Déterminer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ}$ **2.** $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GB}$
3. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BF}$ **4.** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BF}$

2 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que : $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 4$.

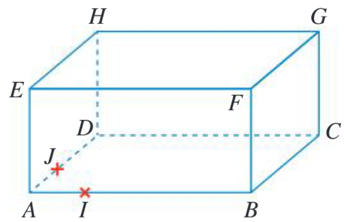
1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{FG}$
b. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{FG}$?
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{HC}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HB}$.

3 On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 5 ci-contre.
Calculer les produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ **2.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ **4.** $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CG}$
5. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{BC}$ **6.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$

4 On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 8$, $AD = 5$ et $AE = 3$.
Les points I et J sont définis par les relations :
$\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

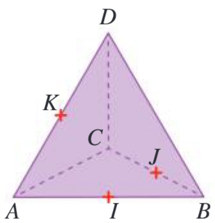


Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ **2.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DH}$ **3.** $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CB}$
4. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **5.** $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{EF}$ **6.** $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BD}$

5 On considère la figure de l'exercice précédent.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{JC}$ de deux manières différentes et en déduire une mesure, arrondie au degré près, de l'angle $\widehat{IJC}$.

6 $ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a, ce qui signifie que ses quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a.
I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.
Calculer les produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ **2.** $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{DI}$
3. $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AC}$ **4.** $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{AD}$