9 Continuité

Point fixe

Exercice 1 — 10 minutes

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$.
On admet que (u_n) converge et que, pour tout entier n, $u_n \in [0;3]$.

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — 25 minutes

Soient f la fonction continue et définie sur $[0\ ;\ 3]$ par $f(x) = \sqrt{6+x}$.
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et montrer que pour tout $x \in [0;3]$,f(x) $\in [0\ ;\ 3]$
2. Montrer par récurrence que (u_n) est une suite croissante, majorée par 3.
3. Que peut-on dire de la convergence de la suite ?
4. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3 — 45 minutes

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l 'aide d'un modèle utilisant la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$, par $f(x) = kx(1-x)$, k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.
L'effectif des coccinelles, exprimé en millions, est approché pour l 'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1.
Par exemple, si pour l 'année zéro il y a $300\ 000$ coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

Partie A

Dans cette partie, on suppose $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\ ;1]$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_n \leq 0,5$$
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ? Justifier la réponse.
5. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

Partie B

On suppose maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ 1]$ et montrer que $f(0,5)$ appartient à $[0\ ;0,5]$
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_n \leq 0,5$$
3. Etablir que, pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ? Justifier la réponse.
5. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?