9 Continuité

Objectifs :

- Savoir-faire 1 : Justifier l'existence d'une unique solution d'une équation de type $f(x) = k$.
- Savoir-faire 2 : Déterminer la valeur approchée d'une solution d'une équation de type $f(x) = k$.
- Savoir-faire 3 : Déterminer le nombre de solution d'une équation de type $f(x) = k$.
- Savoir-faire 4 : Déterminer la limite d'une suite à l'aide du théorème du point fixe.

Continuité

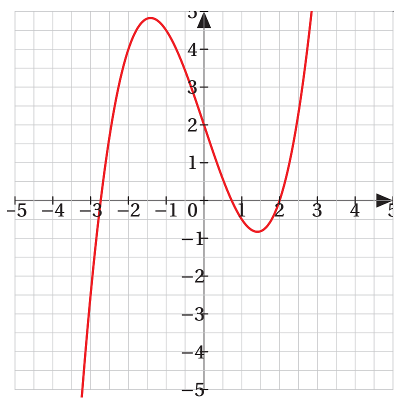
Définition — Fonction continue

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- La fonction f est continue sur I si, pour tout réel $a \in I$, f est continue en a

Remarque

Graphiquement, on peut dire qu'une fonction est continue quand sa représentation graphique se fait en un trait sans lever le stylo.



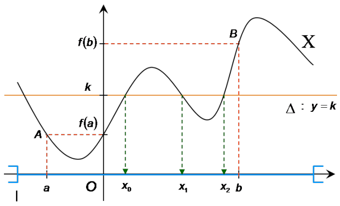
Propriété — Fonctions usuelles

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continuessur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théoreme — Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **au moins** une solution dans l'intervalle $[a;b]$



Remarque

Mise à par leur existence, ce théorème ne permet pas de connaître le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$

Exercice 1 ★

On considère la fonction $f(x)=3x^3-6x+1$.
Montrer que que l'équation $f(x)=500$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Correction

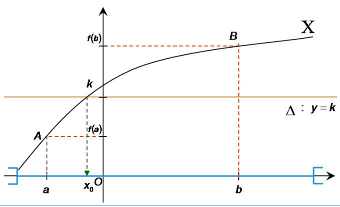
Sur $[0\ ;\ 10]$:

- f est continue comme fonction polynomiale.
- $f(0)=1$
- $f(10)=2941$

Comme $500\in[f(0)\ ;\ f(10)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=500$ admet au moins une solution.

Théoreme — Théorème de la valeur intermédiaires

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet **une unique** une solution dans l'intervalle $[a;b]$.



Exercice 2 ★ Savoir-faire 1 et savoir-faire 2

On considère la fonction $f(x)=e^{-3x^2+2}$.

1. Montrer que que l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;10]$.

   Correction

   Comme $f'(x)=-3x\mathrm{e}^{-3x^2+2}$, f' est du signe de $-3x$ sur $[0\ ;\ 10]$ et donc négative sur cet intervalle.
   La fonction f est donc strictement décroissante.

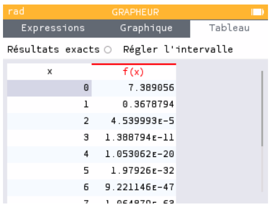
   Sur $[0\ ;\ 10]$:

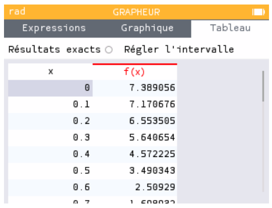
   - f est continue et strictement décroissante.
   - $f(0)\approx 7,4$
   - $f(10)\approx 0$

Comme $5 \in [f(10)\ ;\ f(0)]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

2. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Correction





D'après le tableau de valeur de la calcultrice, $\alpha \in [0,3\ ;\ 0,4]$.

Exercice 3 ★ Savoir-faire 3

On considère la fonction f définie sur $[-10\ ;\ 10]$, dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-10	-5	4	6	10
$f(x)$	21 ↘	6 ↗	15 ↘	13 ↗	20

1. Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = 12$.

Correction

- Sur l'intervalle $[-10\ ;\ -5]$, f est continue et strictement décroissante. $12 \in [f(-5)\ ;\ f(-10)]$ donc l'équation $f(x) = 12$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-10\ ;\ -5]$.
- Sur l'intervalle $[-5\ ;\ 4]$, f est continue et strictement croissante. $12 \in [f(-5)\ ;\ f(4)]$ donc l'équation $f(x) = 12$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-5\ ;\ 4]$.
- Sur l'intervalle $[4\ ;\ 10]$, f a pour minimum 13, l'équation $f(x) = 12$ n'admet donc pas de solution.

• Théorème de la valeur intermédiaires sur des intervalles ouverts

Suite et continuité

Propriété

Fonction continue et limite

Soient f une fonction continue sur un intervalle I, a un réel appartenant à I et (u_n) une suite à valeursndans I.
Si (u_n) converge vers a, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Remarque

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$

Exemple

Si f est la fonction définie sur R par $f(x) = (x+1)^2$ et (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

- Déterminer la limite de $f(u_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Théoreme

Théroème du point fixe

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I **dans lui-même** et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque

Attention dans ce cas, ℓ n'est pas forcement la seule solution de $f(x) = x$

Exercice 4 ★ Savoir-faire 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n+1}$

Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = f(u_n)$

Correction

Dans ce cas $f(x) = \dfrac{6}{x+1}$

Vérifier que si $x \in [0;6]$, alors $f(x) \in [0;6]$.

Correction

$0 \leq x \leq 6$

$1 \leq x+1 \leq 7$

$\dfrac{1}{1} \geq \dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{1}{7}$ car la fonction inverse est décroissante sur $[1\ ;\ 7]$

$\dfrac{6}{1} \geq \dfrac{6}{x+1} \geq \dfrac{6}{7}$

$6 \geq \dfrac{6}{x+1} \geq 0$

Donc si $x \in [0\ ;\ 6]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 6]$

On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0\ ;\ 6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Correction

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. $x = \dfrac{6}{x+1}$

$x(x+1) = 6$

$x^2 + x = 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

Les deux solutions évidentes de cette équation sont -3 et 2.

Comme $-3 \notin [0\ ;\ 6]$, $\ell = 2$

Exercice 5 ★ Savoir-faire 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in N$, u $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in N, u_{n+1} = f(u_n)$.

Correction

Ici $f(x) = \sqrt{x+4}$.

Vérifier que si $x \in [2;5]$, alors $f(x) \in [2\ ;\ 5]$.

Correction

Soit :

$2 \leq x \leq 5$

$6 \leq x + 4 \leq 9$

$\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{9}$ car $\sqrt{x}$ est croissante sur $[6\ ;9]$

$2 \leq \sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{9} \leq 5$

Ainsi pour $x \in [2;5]$, alors $f(x) \in [2\ ;\ 5]$.

On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2\ ;\ 5]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Correction

D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

$x = \sqrt{x+4}$

$x^2 = x + 4$

$x^2 - x - 4 = 0$

$\Delta = (-1)^2 + 4 \times 1 \times 4$

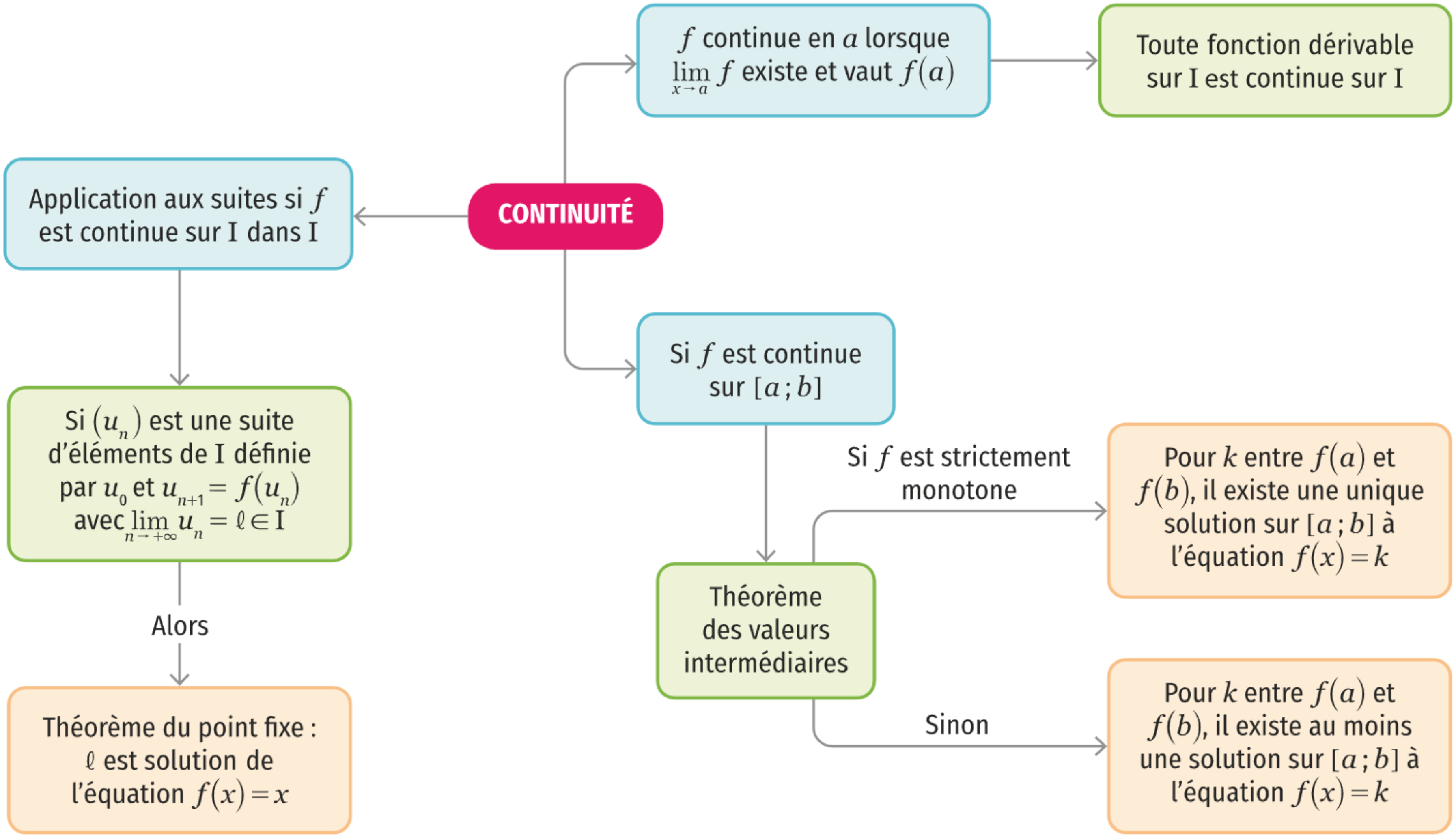
$\Delta = 17$

Il y a donc 2 solutions :

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2 \times (-1)} \approx -1,56$

$x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2 \times (-1)} \approx 2,56$

$x_1 \notin [2\ ;\ 5]$, on sait donc que $\ell = \dfrac{1-\sqrt{17}}{-2}$



Source : Le livre scolaire