

21 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n - 4 \sin(n).$$

1. **CALCULATRICE** Afficher les 30 premiers termes de la suite sur le tableur de la calculatrice. Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?
2. Justifier que $u_n \geq 3n - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

25 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $v_n = 5 - \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que la suite (v_n) converge et préciser la valeur de sa limite.

27 Calculer les limites des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n .

$$1. u_n = 0,5^n \quad 2. v_n = (\sqrt{2})^n \quad 3. w_n = \frac{1}{3^n} \quad 4. z_n = \frac{9^n}{4^n}$$

29 Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n .

$$1. u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad 2. v_n = 1 + 2 \times 0,99^n$$

$$3. w_n = 5 \times 1,99^n + 12 \quad 4. z_n = 8 + \sqrt{3} \left(-\frac{7}{8}\right)^n$$

30 Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n .

$$1. u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \quad 2. v_n = 1 + \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}}$$

$$3. w_n = -3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$$

34 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

1. Exprimer la somme S_n en fonction de n .
2. Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

36 **VRAI OU FAUX**

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La suite (u_n) est monotone.
2. La suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) admet un majorant.
4. La suite (u_n) est minorée.
5. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

38 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 10 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6.$$

1. **CALCULATRICE** Conjecturer à la calculatrice le sens de variation de la suite (u_n) .
2. Prouver par récurrence que $u_n \geq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6.$$

4. Conclure sur le sens de variation de la suite.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ?

50 On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}.$$

1. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge et donner la valeur de sa limite.

51 Matteo observe un nénuphar sur une mare. Chaque jour, le nénuphar perd la moitié de sa surface, mangée par un poisson carpe.

1. Au bout de combien de jours la surface du nénuphar sera-t-elle inférieure ou égale à 1 % de sa surface de départ ?
2. Le nénuphar disparaîtra-t-il un jour ?

56 **ALGO PYTHON**

On dépose une tasse de café dans une pièce dont la température est de 21 °C.

En s'appuyant sur la loi de Newton, on peut démontrer que la température du café (en °C), en fonction du nombre n de minutes écoulées, peut être modélisée par une suite (T_n) vérifiant la relation $T_{n+1} = 0,97T_n + 0,63$ pour tout entier naturel n .

1. On pose, pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 21$. Montrer que la suite (U_n) est géométrique.
2. Justifier que, quelle que soit la valeur de T_0 , la suite (T_n) converge vers un réel que l'on précisera. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Écrire, en langage Python, une fonction `tiede` ayant pour argument I , la température initiale du café (supérieure à 30 °C), et qui renvoie le nombre de minutes à attendre pour que la température du café soit en dessous de 30 °C.