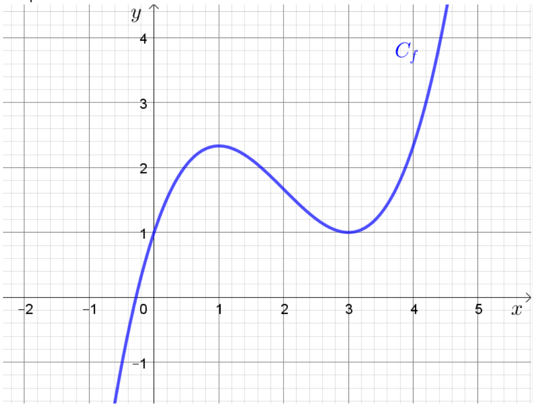
Exercices d'application

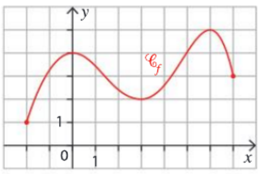
Exercice 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ donct la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



- Déterminer graphiquement la convexité de f et préciser éventuellement les points d'infléxion.

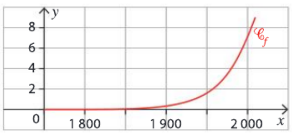
17 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 7]$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.



• Déterminer graphiquement la convexité de f et préciser les points d'inflexion éventuels de $\mathscr{C}_f$.

21 **Émissions de CO_2**

On considère la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f, définie sur l'intervalle $[1\,750\ ;\ 2\,010]$, qui modélise les émissions globales de dioxyde de carbone (en gigatonne) en fonction de l'année, entre 1750 et 2010.



1. Déterminer graphiquement le sens de variation et la convexité de f.
2. En quoi ce modèle est-il inquiétant pour notre avenir ?

Exercices d'entrainement

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5x^2e^x.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.
3. Étudier la convexité de la fonction f.
4. Préciser les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.
5. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Vérifier en traçant cette courbe sur la calculatrice ou avec un logiciel de géométrie.

56 **Raisonner**

Soit f une fonction convexe dérivable et définie sur un intervalle I.

• Démontrer que, pour tous réels a et b de I, on a :

$$f(b) - f(a) \geqslant f'(a)(b-a).$$

63 On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+9}.$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Étudier le sens de variation de f sur $[0\ ;+\infty[$.
3. Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse 3.
6. a. Vérifier que, pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}.$$

b. En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.

78 **Fonction de satisfaction**

Modéliser

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

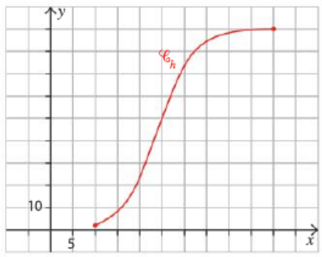
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ».

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » h est définie sur l'intervalle $[10\ ;\ 50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1+e^{-0{,}25x+6}}\ ;$$

où x est exprimé en millier d'euros.

On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h, représentée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». En donner une interprétation concrète.
2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.
3. Vérifier que, pour tout $x \in [10\ ;\ 50]$:

$$h''(x) = \frac{5{,}625e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6}-1\right)}{\left(1+e^{-0{,}25x+6}\right)^3}.$$

4. En déduire la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.