Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}$, la courbe est située "au dessus" du segment [AB], alors on dit que f est `convexe` sur I.
- Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}$, la courbe est située "au dessous" du segment [AB], alors on dit que f est `concave` sur I.

Exemple

Propriété

`Convexité des fonctions usuelles`

- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$
- La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$
- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$

Théoreme

`Convexité & fonction dérivée`

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f convexe sur I équivaut à f' croissante sur I
- f concave sur I équivaut à f' décroissante sur I

|

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- Si f est convexe sur I, alors $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
- Si f est concave sur I, alors $\mathscr{C}$ est en-dessous de ses tangentes.

Définition

`Point d'inflexion`

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Un `point d'inflexion` est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Propriété

`Convexité & point d'inflexion`

Si la courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a alors la convexité de f change.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

- Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}$, la courbe est située "au dessus" du segment [AB], alors on dit que f est `convexe` sur I.
- Si pour tous points distincts A et B de $\mathscr{C}$, la courbe est située "au dessous" du segment [AB], alors on dit que f est `concave` sur I.

i Nous venons donc de voir que pour étudier la convexité d'une fonction f, il fallait étudier les variations de la fonction f'. Or nous savons que pour étudier les variations d'une fonction, il faut étudier le signe de sa fonction dérivée. Il s'agit donc d'étudier le signe de la fonction dérivée de la fonction f'. On appele cette fonction la dérivée seconde de la fonction f , et on la note f'' (dire f seconde).

Théoreme

`Convexité & fonction dérivée seconde`

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f convexe sur I équivaut à f'' positive sur I
- f concave sur I équivaut à f'' négative sur I

la courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a équivaut à f'' s'annule et change de signe en a