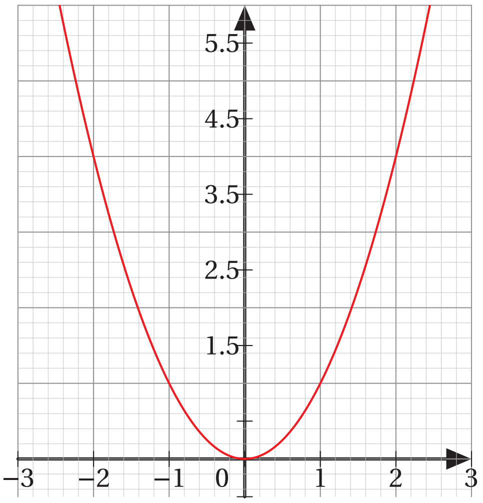
Le vocabulaire de la convexité

i Dans cette partie, nous allons par l'observation essayer de définir les termes `convexe`, concave et `point d'infléxion`.

Exemple

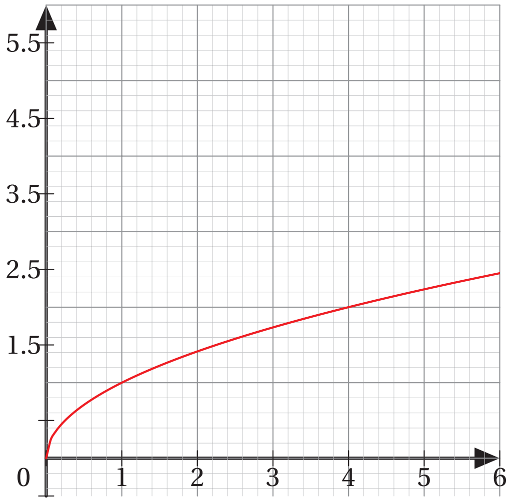
Observer les courbes tracées ci-dessous.

$f(x) = x^2$



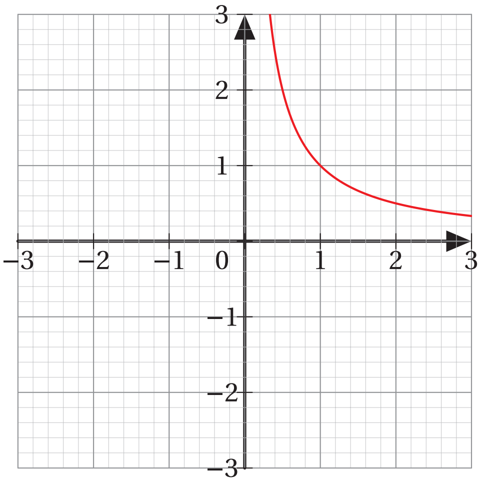
La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x}$



La fonction g est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$

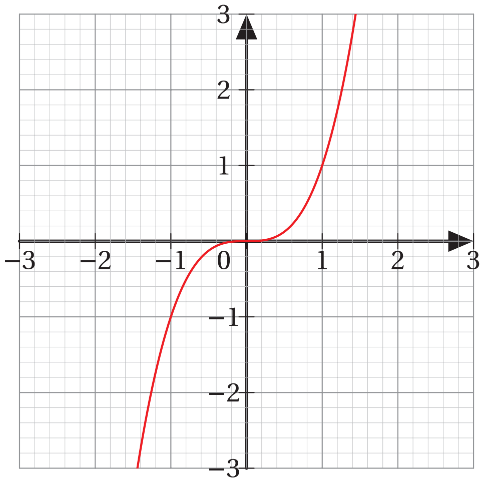
$h(x) = \dfrac{1}{x}$



La fonction i est :

- concave sur $]-\infty\ ;\ 0[$
- convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$

$i(x) = x^3$



La fonction i est :

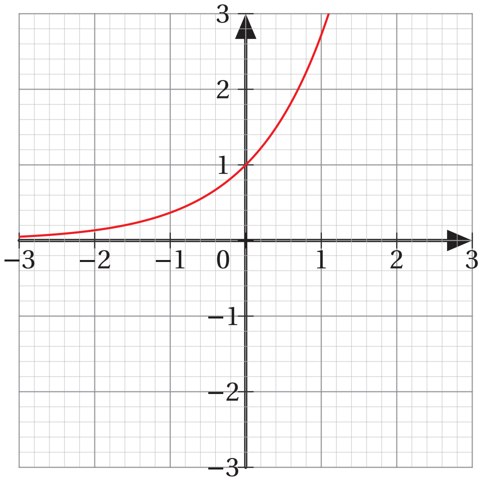
- concave sur $]-\infty\ ;\ 0[$
- convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$

Elle admet un point d'inflexion en 0.

Exercice 1

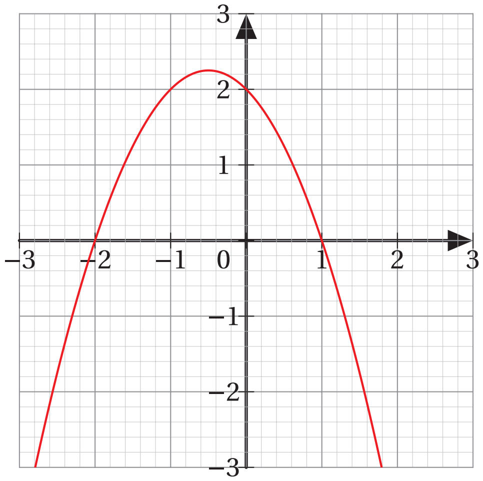
Pour les 3 courbes suivantes, dire si elles sont convexes ou concaves et préciser sur quels intervalles. Possèdent-elles des points d'inflexion ? Lesquels ?

$k(x) = e^x$



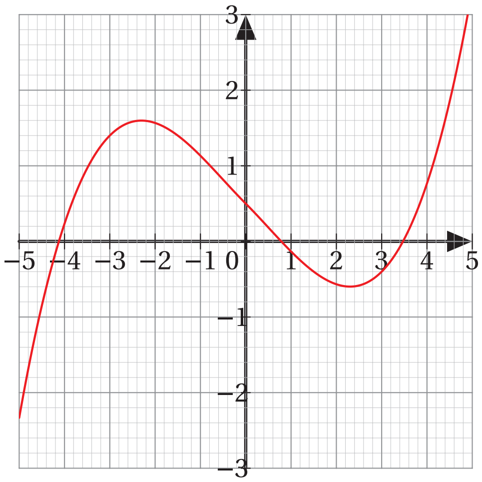
La fonction k est ....

$h(x) = -x^2 - x + 2$



La fonction h est ....

$$l(x) = \frac{x^3}{15} - 0,1x^2 - 0,6x + 0,5$$



....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 2

Donner une définition de fonction convexe, fonction concave et de point d'inflexion :

....

....

....

....

....

....

....

Convexité et accélération

Reprenons plus en détail la fonction carrée f et la fonction racine carrée g.
Pour chacune d'entre elle, compléter les tableaux ci-dessous qui mettront en évidence les écarts entre les images de deux nombres espacés de 1 unité ($|f(1) - f(0)|$; $|f(2) - f(1)|$; ...).

1. Compléter les deux tableaux ci-desous.

x	$f(x) = x^2$	Ecart ente deux images succesives
0	0	
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

x	$g(x) = \sqrt{x}$	Ecart ente deux images succesives
0	0	
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Tangente

Dans cette partie, nous allons observer le lien entre la convexité d'une fonction et la position relative de ces tangentes avec sa courbe représentative.

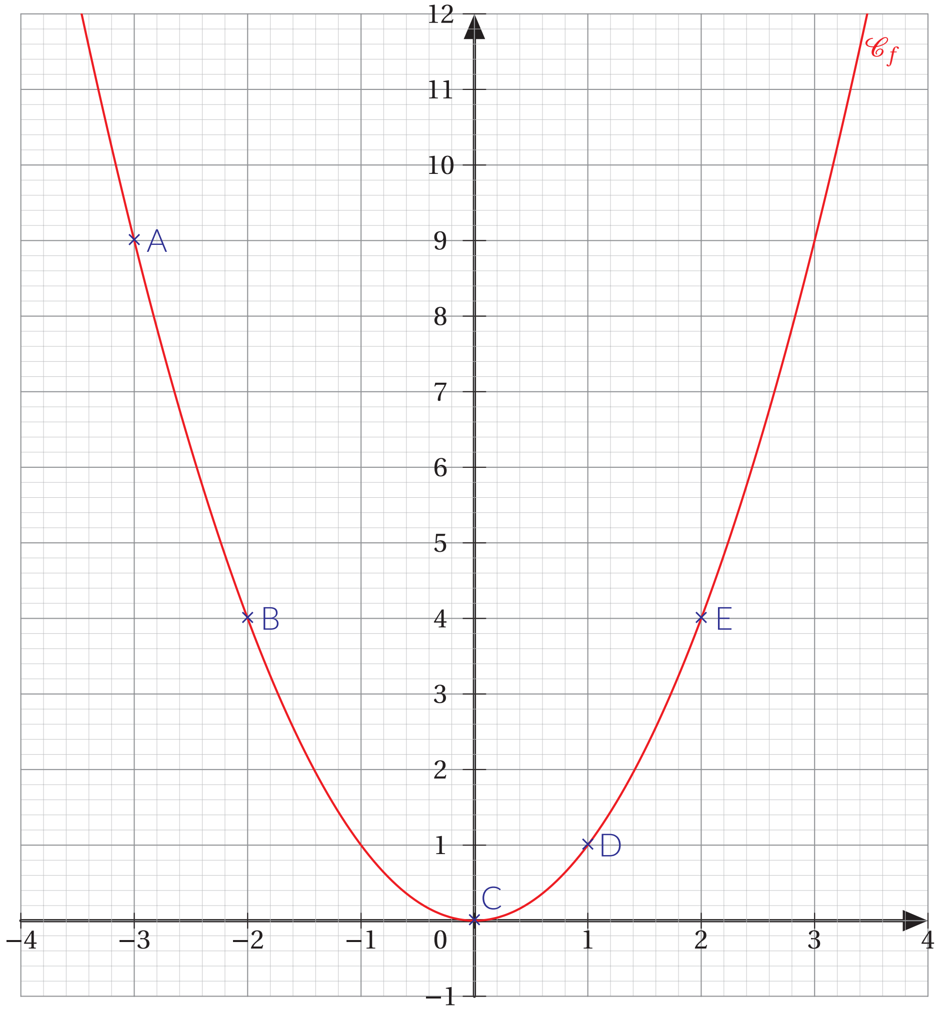
Exercice 3 ★

On considère la fonction $f(x) = x^2$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_{\{}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							

2. Sur le graphique ci-contre, tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -3 ; -1 ; 0 ; 1 et 2.

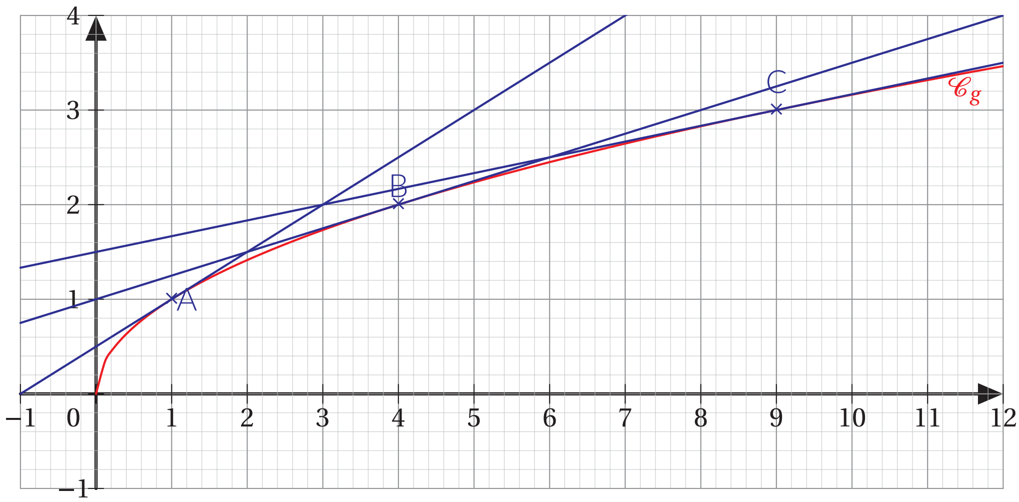


Exemple

Observation

Cas d'une fonction concave.

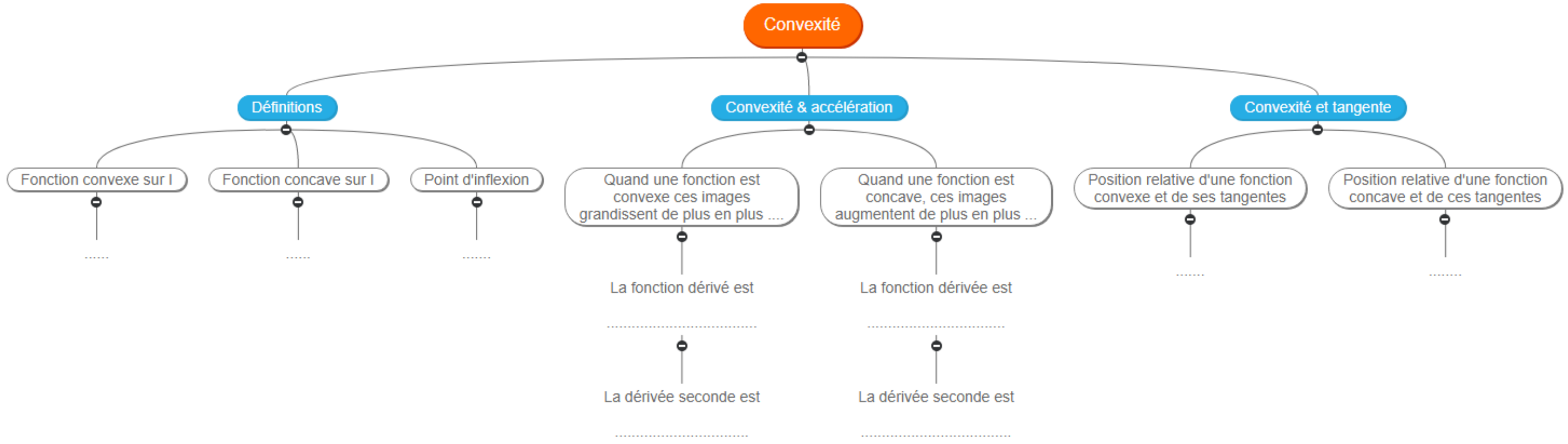
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \sqrt{x}$. La figure ci-dessous représentate $\mathscr{C}_h$, sa courbe représentative et ces tangentes aux points d'abscisses 1 ; 4 et 9.



Bilan

Exercice 4

Complète la carte mentale ci-dessous, à partir des observations faites précédemments.



Exercices

Exercice 5 Exercice modèle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

1. Etudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$
$f'(x) = x^2 - 18x$
$f''(x) = 2x - 18$

f'' étant une fonction affine s'annulant en 9, on en déduit le tableau de signe suivant puis la convexité de la fonction f.

x	$-\infty$		9		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		concave		convexe	

Exercice 6 Exercice d'application 1

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^3 - 6x^2 + 4x - 5$.

1. Etudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 Exercice d'application 2

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x+5)e^{-2x}$.

1. Etudier la convexité de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Sources :

- Source de l'activité :
  https ://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/des-maths/laboratoires/decouverte-de-la-convexite-en-terminale-specialite-1439036.kjsp ?RH=PEDA
- Source de l'exercice d'application : Yvan Monka
  https ://www.maths-et-tiques.fr/telech/ConvexiteTESL.pdf