# 3 Complément sur les dérivées

## I. Rappels

### • Équation de la tangente

**Propriété** — Équation de la tangente

Soit $f$ une fonction, et $I$ un intervalle ouvert de $R$, soit $a \in I$. On suppose que $f$ est dérivable en $a$. La droite passant par le point $A(a; f(a))$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$ est appelé `tangente` à la courbe au point d'abscisse $a$.
Son équation est alors :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

### • Dérivée et variation

**Propriété** — Variation

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset R$, ouvert.

- Si $f(x)$ est **positive** pour tout $x \in I$ alors la fonction est **croissante** sur l'intervalle $I$.
- Si $f(x)$ est **négative** pour tout $x \in I$ alors la fonction est **décroissante** sur l'intervalle $I$.

**Propriété** — Extrémum

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset R$, ouvert, et $a$ un réel de l'intervalle $I$.

- Si $f$ admet un extremum en $a$, alors $f'(a) = 0$.

### • ♥ Dérivées des fonctions usuelles

**Propriété**

| Fonction $f$ | Domaine de dérivabilité | Dérivée |
|---|---|---|
| $a \in \mathbb{R}, f(x) = a$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = x$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = x^2$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 2x$ |
| $f(x) = x^3$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 3x^2$ |
| $n \in \mathbb{N}, f(x) = x^n$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |

Propriété

| Fonction $f$ | Domaine de dérivabilité | Dérivée |
|---|---|---|
| $f(x) = \frac{x}{}$ | Dérivable sur $\mathbb{R}*$ | $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | Dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \mathrm{e}^x$ | Dérivable sur $\mathbb{R}$ | $f'(x) = \mathrm{e}^x$ |

## Opérations sur les dérivées

Propriété

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $I$.

| | |
|---|---|
| $u+v$est dérivable sur $I$ | $(u+v)' = u' + v'$ |
| $ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $I$ | $(ku)' = ku'$ |
| $u \times v$ est dérivable sur $I$ | $(u \times v)' = u'v + uv'$ |
| $\frac{1}{u}$ est dérivable sur $I$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$<br>Attention il faut évidemment $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. |
| $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $I$ | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$<br>Attention il faut évidemment $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. |
| $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I$ | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$<br>Attention il faut évidemment $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. |
| $\mathrm{e}^u$ est dérivable sur $I$ | $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ |

## II - Fonctions composées

### • Définition

Définition — Fonction composée

Soient $u$ et $v$ deux fonctions dont les ensembles de définition respectifs sont notés et $D_u$ et $D_v$.

La fonction composée de $u$ par $v$, notée $v \circ u$, est la fonction définie par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.
L'ensemble de définition de $v \circ u$ est l'ensemble des réels $x$ appartenant à $D_u$ dont l'image par $u$ appartient à $D_v$.

Exemple

Soit $u : x \mapsto 2x + 6$, définie sur $\mathbb{R}$ ,et $v : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
$w = v \circ u$ est définie si $u(x) \geq 0$, ainsi $D_w = [-3\ ;\ +\infty[$.
Et par exemple, l'image de 5 par $w$ est 4 $\left(w(5) = v(u(5)) = \sqrt{2 \times 5 + 6} = \sqrt{16} = 4\right)$

### • Dérivée d'une fonction composée

Propriété — Dérivée d'une fonction composée

Soient $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ telles que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $v \circ u$ est dérivable sur $I$ et on a $(v \circ u)' = u'(v' \circ u)$

**Remarque**

On connait déjà la dérivée de certaines fonctions composées :

- $\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$ pour tout $x \in D_u$
- $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ pour tout $x \in D_u$ tel que $u(x) > 0$
- $\left((u(x))^n\right)' = u'(x) \times n u(x)^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

## III - Dérivée seconde

Définition — Dérivée seconde

Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $f'$ sa fonction dérivée.La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $I$ si $f'$ est elle-même dérivable sur $I$ On note $f''$ la dérivée de $f'$. Elle est appelée dérivée seconde de $f$

Exemple

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 4x - 12$. Alors :

- $f'(x) = 15x^2 - 14x + 4$
- $f''(x) = 30x - 14$