Chapitre 2

Partie 3 : Principe de récurrence - Exercices

Exercice 1 Suite et récurrence

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 0,6U_n + 4 \quad \text{pour tout n} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $U_n \leq 10$ pour tout entier naturel n .
2. On considère la suite (V_n), définie par $V_n = U_n - 10$
   (a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Déterminer son terme initial et sa raison
   (b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n. En déduire celle de (U_n)

Exercice 2

Soit (un) la suite définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$

Exercice 3 ★

Soit (un) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 4 ★

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

Exercice 5 ★

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 6 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{P}_n$ la proposition suivante :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7 ★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{P}_n$ la proposition suivante : *"Pour tout réel x strictement positif,* $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Démontrer que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$