Chapitre 2

Partie 4 : Comportement général - Exercices

Exercice 1 ★

On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n = 2^n - n$.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

Exercice 2 ★

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in {}^*$, par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

Exercice 3 ★

On considère la suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n+3}{n+1}$.

Déterminer le sens de variation de (u_n).

Exercice 4 ★

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n - 5 \end{cases}$$

Exercice 5 ★

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $[\,0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x}{1+2x}$$

   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

   (b) En déduire que si $x \in [\,0\,;\,1]$, alors $f(x) \in [\,0\,;\,1]$

2. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

   (b) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n).

Exercice 6 ★

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq n+3$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$.

   (c) En déduire le sens de variation de (u_n).

2. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - n$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n