2 Suites numériques

I - Suites numériques

Définition — Définition & notations

Une suite numérique est une liste **ordonnée** de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n (se lit « u indice n ») est appelé le **terme** de **rang** n de cette suite (ou d'indice n).

On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par u :
$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$n \longrightarrow u(n)$ (ou u_n suivant les notations)

On note cette suite (u_n).

Notation

On considère la suite (u_n) dont les premiers termes sont :
$\underbrace{5}_{\text{rang } 0} \; ; \; \underbrace{10}_{\text{rang } 1} \; ; \; \underbrace{15}_{\text{rang } 2} \; ; \; \dots$

On notera :

- $u_0 = 5 \rightarrow$ le terme de rang 0 vaut 5
- $u_1 = 10 \rightarrow$ le terme de rang 1 vaut 10
- $u_2 = 15 \rightarrow$ le terme de rang 2 vaut 15

Remarque

On pourra rapprocher la notation u_n de la notation fonctionnelle $u(n)$, en gardant bien à l'esprit que $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{N}^*$.

Différentes types de définition d'une suite

Définition — Définition explicite d'une suite

Une suite est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime en fonction de l'entier n.
Il existe une fonction f qui permet de déterminer un terme à partir de son rang $u_n = f(n)$.

Remarque

Dans ce cas, on peut calculer chaque terme directement à partir de rang n.

Exemple

1. Pour tout entier naturel n, on donne $U_n = 5n+1$. Calculer U_0, U_3
2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on donne $V_n = \sqrt{n-1}$. Calculer V_1, V_5.

Correction :

$U_n = 2n$

Pour $n = 0$
$U_0 = 5 \times 0 + 1 = 1$
Pour $n = 3$
$U_3 = 5 \times 3 + 1 = 16$

$V_n = \sqrt{n-1}$

Pour $n = 1$
$V_1 = \sqrt{1-1} = 0$
Pour $n = 5$
$V_5 = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$

Définition — Définition par récurrence

Une suite est définie par une relation de récurrence lorsqu'elle est définie par la donnée de :

1. son premier terme ;
2. une relation qui permet de calculer chaque terme à partir du précédent, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque

Dans ce cas, pour calculer un terme u_n , il faut avoir le termes qui le précèdent u_{n-1}.

Exemple — Calculer les termes d'une suite définie par récurrence

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 & = -5 \\ u_{n+1} & = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Calculer u_3 ?

Ici, pour pouvoir calculer u_3, on va devoir calculer u_1 et u_2.

- $u_1 = 2u_0 - 5$
  $= 2 \times (-5) - 5$
  $= -15$
- $u_2 = 2u_1 - 5$
  $= 2 \times (-15) - 5$
  $= -35$
- $u_3 = 2u_2 - 5$
  $= 2 \times (-35) - 5$
  $= -75$

• Suites arithmétiques

•• Définition & premières propriétés

→ Une suite (u_n) est dite **arithmétique** si pour passer d'un terme au suivant, on ajoute toujours le même nombre r

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \end{tikzcd}$$

Définition

Suite arithmétique

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout

$$n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite (u_n).

→ La définition précédente est une définition par récurrence, on retrouvera la définition explicite de la suite (u_n) sous le nom terme général de la suite.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+n\times r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 & \cdots & u_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \end{tikzcd}$$

Propriété

Terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de terme initial u_0, alors !

$$u_n = u_0 + r \times n$$

→ Il se peut que le terme initial de la suite ne soit pas u_0, dans ce cas on peut utiliser suivant le cas, l'une des formules ci-dessous :

- $u_n = u_1 + r \times (n-1)$
- $u_n = u_p + r \times (n-p) \qquad p \in \mathbb{N}$

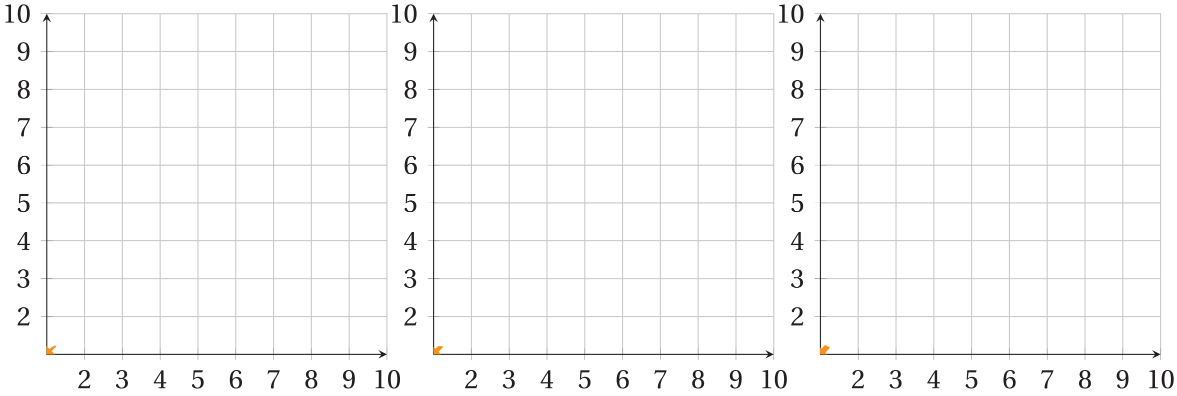
•• Variations & représentation graphique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r :

- si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante.
- si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

$r > 0$ — $r = 0$ — $r < 0$



•• Limite

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r, alors :

- Si $r < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

- Si $r = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$$

- Si $r < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

•• Somme

Propriété

Somme des n premiers entiers

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

On note S la somme des n premiers entiers.

$S = 1+2+\ldots+(n-1)+n$
$S = n+(n-1)+\ldots+2+1$

On a donc :

$2S = n+1+n+1+\ldots+n+1+n+1$
$2S = n(n+1)$
$S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique. La somme des termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple

Soit (u_n) une suite arithmétique de terme initial $u_0 = 4$ et de raison $r = 2$. Calculer la somme S des 10 premiers termes de cette suite.

" *Attention la suite commençant à 0 le 10ème terme est* u_9

$u_9 = u_0 + 9 \times r = 4 + 9 \times 2 = 22$

Ainsi $S = 10 \times \dfrac{4 \times 22}{2} = 10 \times 44 = 440$

• Suites géométriques

•• Définition & premières propriétés

→ Une suite (v_n) est dite **géométrique** si pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par le même nombre q

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 & \cdots & v_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Définition

Suite géométrique

Une suite (v_n) est géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout

$$n \in \mathbb{N} : \qquad v_{n+1} = v_n \times q$$

.

Le nombre q est appelé **raison** de la suite (v_n).

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^n"'] & v_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_2 & \cdots & v_{n-1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & v_n
\end{tikzcd}$$

Propriété

Terme général

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0, alors :

$$v_n = u_0 \times q^n$$

→ Il se peut que le terme initial de la suite ne soit pas v_0, dans ce cas on peut utiliser suivant le cas, l'une des formules ci-dessous :

- $v_n = v_1 \times q^{n-1}$
- $v_n = v_p \times q^{n-p}$ $\qquad p \in \mathbb{N}$

•• Variations & représentation graphique

Propriété — Variation de q^n

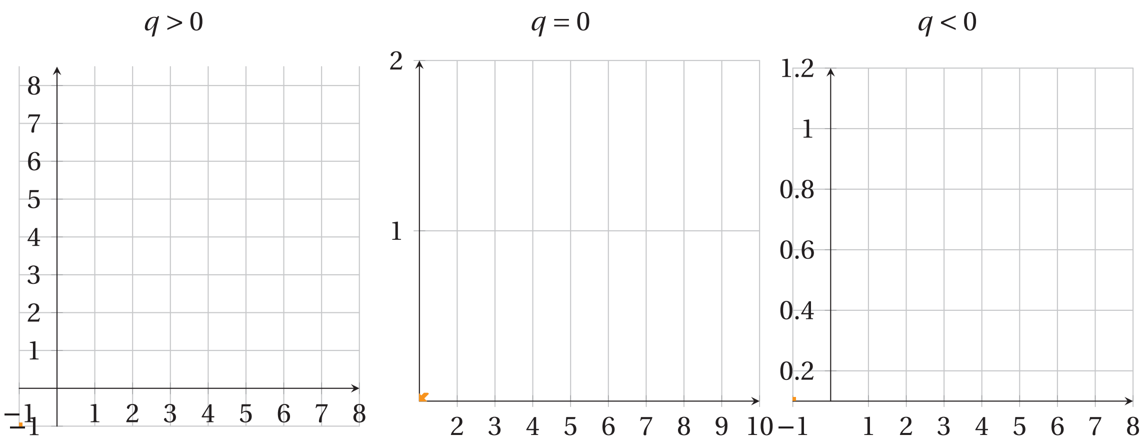
On considère la suite (q^n) , pour $n \in \mathbb{N}$:

- si $q > 1$, la suite $\left(q^n\right)$ est croissante.
- si $0 < q < 1$, la suite $\left(q^n\right)$ est décroissante.
- si $q = 1$, la suite $\left(q^n\right)$ est constante.
- sur $\mathbb{N}^*$, si $q = 0$, la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

Propriété — Variation d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial u_0, alors

- si $u_0 > 0$, alors les variations de la suite v_n sont les mêmes que celle de $\left(q^n\right)$.
- si $u_0 < 0$, alors les variations de la suite v_n sont les mêmes que celle de $\left(q^n\right)$.



•• Limite

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initial v_0 et de raison r, alors :

- Si $-1 < q < 1$
  $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
- Si $q > 1$
  - Si $v_0 > 0$
    $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
  - Si $v_0 < 0$
    $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$
- Si $q < -1$
  La suite (v_n) n'admet pas de limite.

•• Somme

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique. La somme des termes consécutifs de cette suite est donnée par :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de terme}}}{1-q}$$

Démonstration

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.

$S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$

$S = v_p(1+q+\cdots+q^{n-p})$

Donc :

$qS = v_p(q+q^2+\ldots q^{n-p+1})$

Par soustraction, on obtient :

$S-qS = v_p\left(1+q+\cdots+q^{n-p}\right) - v_p\left(q+q^2+\ldots q^{n-p+1}\right)$

$S-qS = v_p\left(1+q+\cdots+q^{n-p}-q-q^2-\cdots-q^{n-p+1}\right)$

$S-qS = v_p\left(1+\cancel{q}+\ldots+\cancel{q^{n-p}}-\cancel{q}-\cancel{q^2}-\ldots.-q^{n-p+1}\right)$

$S-qS = v_p\left(1-q^{n-p+1}\right)$

$S(1-q) = v_p\left(1-q^{n-p+1}\right)$

$$S = v_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple

Soit (v_n) une suite géométrique de terme initiale $v_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_5$.

$S = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$S = 3 \times \dfrac{1-2^{5+1}}{1-2}$

$S = 3 \times \dfrac{1-2^6}{-1}$

$S = 3 \times \dfrac{-63}{-1}$

$S = 189$

II - Suite arithmético-géométrique

Définition

Suite arithmético-géométrique

(u_n) est une suite arithmético-géométrique si elle est définie par un premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 5 \end{cases}$$

Cette suite est une suite arithmético-géométrique.
Ainsi $u_0 = 1$; $u_1 = 5,5$; $u_2 = 7,75$; ...

Remarques

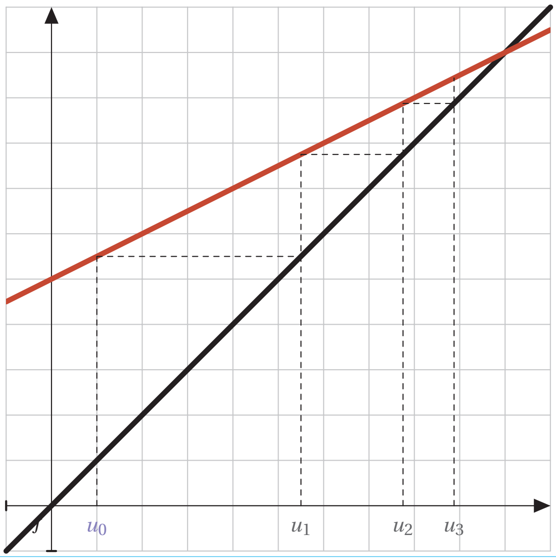
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, on obtient une suite arithmétique de raison b.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, on obtient une suite géométrique de raison a.

• Représentation graphique

On utilise la même procédure que pour les suites définies par une relation de récurrence. Dans le cas des suites arithmético-géométriques, la fonction f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 5$ pour tout n entier naturel.
On trace la représentation graphique de la fonction affine f définie par $f(x) = 0,5x + 5$ qui est une droite.
On trace la droite d'équation $y = x$.
On place sur l'axe des abscisses $u_0 = 1$.



• Suite géométrique associée

Définition

Point fixe

Soit un réel α.
α est le **point fixe** de la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.
On a aussi :
$\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.

Propriété

Suite associée

Soit (un) une suite arithmético-géométrique définie, pour tout n entier naturel, par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.
Et un réel α, point fixe de la fonction affine $f(x) = ax+$.
Alors la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison a.

Démonstration

On considère (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$ et α le **point fixe** de la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$, c'est-à-dire le nombre tel que $a\alpha + b = \alpha$.
$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b)$
$u_{n+1} - \alpha = au_n + b - a\alpha - b$
$u_{n+1} - \alpha = au_n - a\alpha$
$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$

On pose $v_n = u_n - \alpha$. On a ainsi $v_{n+1} = av_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison a.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$.
Dans ce cas, le point fixe est α tel que : $0,5\alpha + 1 = \alpha$, soit $\alpha = 2$.
Ainsi, (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique de raison 0,5.

Démontrons-le. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2$
$v_{n+1} = 0,5u_n + 1 - 2$
$v_{n+1} = 0,5u_n - 1$
$v_{n+1} = 0,5(u_n - \dfrac{1}{0,5})$
$v_{n+1} = 0,5(u_n - 2)$
$v_{n+1} = 0,5v_n$

La suite (vn) est donc une suite géométrique de raison 0,5 et de terme initial $v_0 = -1$.

• Forme explicite

Propriété

Soit n un nombre entier naturel et α un réel.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique et (v_n) la suite géométrique associée, qui est de raison a et de premier terme $v0 = u0 - \alpha$, α étant le point fixe de la suite (un). On a donc $u0 = v0 + \alpha$.

(v_n) étant une suite géométrique de raison a, on a : $v_n = v_0 \times a^n$ Comme $u_n = v_n + \alpha$
$u_n = v0 \times a^n + \alpha$
D'où $u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$

Exemple

Reprenons la suite de l'exemple précédent. On a :
$u_n = 0,5^n \times (1-2) + 2$
$u_n = 0,5^n(-1) + 2$
$u_n = -0,5^n + 2$

• Limite

•• Limite de a^n

Propriété Limite de a^n

Soit a un nombre réel.

- Si $0 < a < 1$, alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} a^n = 0$.
- Si $a > 1$, alors $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} a^n = +\infty$.

•• Limite d'une suite arithmético-géométrique

Soit n un entier naturel et a, b et α des réels.
Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et α tel que $a\alpha + b = \alpha$. On a vu que $u_n = a^n(u0 - \alpha) + \alpha$.

Propriété Limites

- Si $0 < a < 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} u_n = \alpha$.
- Si $a > 1$, alors $\lim_{x \to +\infty} u_n = +\infty$.

III - Principe de récurrence

Définition — Proposition

Une proposition est un énoncé mathématique complet qui est soit vrai soit faux.
Par exemple :

- "$23 \geq 10$" est une proposition fausse ;
- Alors que *"Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypothénuse est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés"* est une proposition vraie.

Une proposition peut-être :

- une égalité, par exemple $\mathscr{P}_n$:
  $1+2+\cdots+3 = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- une inégalité, par exemple $\mathscr{P}_n$:
  $(1+\pi)^n \geq 1+n\pi$;
- une phrase, par exemple $\mathscr{P}_n$:
  $n^3 - n$ est un multiple de 3

Définition — Raisonement par récurrence

Le raisonnement par récurrence ne peut s'utiliser que lorsque l'on cherche à démontrer qu'une proposition est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Propriété

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
On considère la proposition $\mathscr{P}_n$ défnie pour tout entier naturel $n > n_0$.
Si les deux conditions suivantes sont vérifées :

1. *Initialisation :* $\mathscr{P}_n$ est vraie pour l'entier n_0 ;
2. *Hérédité :* pour tout entier naturel $k \leq n_0$,
   «$\mathscr{P}_k$ *est vraie.*» implique $\mathscr{P}_{k+1}$ *est vraie.*

Alors on peut conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq n_0$, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.

•• Rédaction

Voir correction de l'activité {*Des points & des segments* }.

IV - Variations

Définition — Monotonie

Une suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ lorsque $u_n < u_{n+1}$ pour tout n. Une suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ lorsque $u_n > u_{n+1}$ pour tout n

Remarques

- Une suite à la fois croissante et décroissante est une suite constante. Pour tout n on a $u_n = u_{n+1}$
- Une suite peut être ni croissante, ni décroissante ; par exemple, . Les termes de cette suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ sont alternativement $1, -1, 1, -1, \ldots$

• Etude de la monotonie d'une suite

i Il y a 3 méthodes pour déterminer le sens de variation d'une suite :

- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Lorsque $u_n = f(n)$, on étudie le sens de variation de la fonction f.
- Lorsque $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie la position du quotient par rapport à 1

Propriété — Méthode générale $u_{n+1} - u_n$

On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ alors la suite (u_n) est `croissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ alors la suite (u_n) est `décroissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$ alors la suite (u_n) est `constante` sur $\mathbb{N}$.

Propriété — Forme explicite $u_n = f(n)$

Si (u_n) est donné par sa forme explicite (*i.e.* $u_n = f(n)$), on étudie les variations de f.

- Si $f(x)$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est `croissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $f(x)$ est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est `décroissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $f(x)$ est constante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite (u_n) est `constante` sur $\mathbb{N}$.

Propriété — Méthode du quotient

Si $(u_n) > 0$, on peut comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite (u_n) est `croissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite (u_n) est `décroissante` sur $\mathbb{N}$.
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite (u_n) est `constante` sur $\mathbb{N}$.