{Des points & des segments }

Propriété

On considère, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, la somme :

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$

alors :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

C'est à dire :

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

1. *Enoncé la propriété :* Soit $n \in \mathbb{N}*$, on note $\mathscr{P}_n$ la proposition

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. *Initialisation :* Soit $n = 1$,

D'une part,	D'autre part,
1	$\frac{1 \times 2}{2} = 1$

On a ainsi montré que est $\mathscr{P}_1$ vraie.

3. *Hérédité*

On considère tel P_k que est vraie ; (*autrement dit :* $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$) On veut démontrer que P_{k+1} est vraie ; (*autrement dit :* $1+2+3+\ldots+k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$)

D'après l'hypothèse de récurrence ($\mathscr{H}.\mathscr{R}.$) :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)\big(k+2\big)}{2}$$

Donc la proposition $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

4. *Conclusion :* Par le principe de récurrence, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \in N*$