Corrigé du BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ **MATHÉMATIQUES**

sujet 2 – Mardi 16 avril 2024

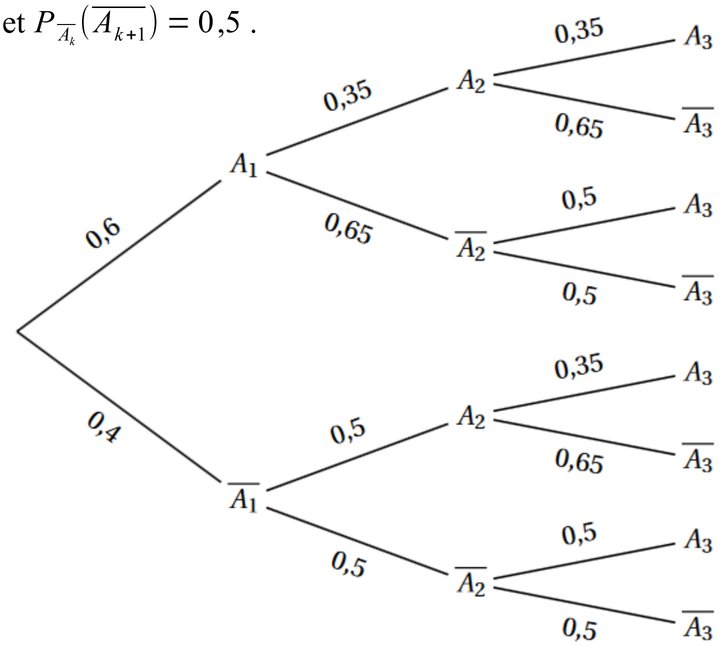
Exercice 1 **(5 points)** **Thème : probabilités**

Partie A

1. D'après le texte, pour $k = 1$ ou $k = 2$, on a : $P_{A_k}\left(\overline{A_{k+1}}\right) = 0{,}65$ et $P_{\overline{A_k}}\left(A_{k+1}\right) = 0{,}5$.

Donc $P_{A_k}\left(A_{k+1}\right) = 0{,}35$ et $P_{\overline{A_k}}\left(\overline{A_{k+1}}\right) = 0{,}5$.

On complète l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation.



1 point

2. La probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est : $P(X=2) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$

$$= 0{,}6 \times 0{,}35 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}65 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}35$$

$$= 0{,}1365 + 0{,}195 + 0{,}07 = 0{,}4015$$

0,5 point

3. a. On a vu que $P(X=2) = 0{,}4015$; de plus $P(X=0)$ et $P(X=3)$ sont donnés dans le tableau. On a donc :

$$P(X=1) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=2) + P(X=3)\right)$$

$$= 1 - (0{,}1 + 0{,}4015 + 0{,}0735) = 1 - 0{,}575 = 0{,}425$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,5 point

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1	0,425	0,401 5	0,073 5

b. $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}425 + 2 \times 0{,}4015 + 3 \times 0{,}0735 = 1{,}4485$.

0,5 point

c. Sur 3 tirs, le joueur atteindra sa cible, en moyenne, 1,5 fois.

0,5 point

Partie B

1. a. L'expérience élémentaire consiste à voir si une personne est gagnante (avec une probabilité $p = 0{,}073\,5$) ou non ; il n'y a donc que deux issues. On effectue cette expérience élémentaire 15 fois dans des conditions identiques et indépendantes. ***0,5 point***

Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de gagnants sur 15 personnes suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}073\,5$.

b. La probabilité qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu est :

$$P(Y=5) = \binom{15}{5} \times 0{,}073\,5^5 \times (1 - 0{,}073\,5)^{15-5} \approx 0{,}003.$$ ***0,5 point***

2. On cherche le nombre minimum N de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98, c'est-à-dire tel que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}98$. On résout cette inéquation.

$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - P(Y=0) \geqslant 0{,}98 \Leftrightarrow P(Y=0) \leqslant 0{,}02$

$\Leftrightarrow \binom{N}{0} \times 0{,}073\,5^0 \times (1 - 0{,}073\,5)^{N-0} \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow 0{,}9265^N \leqslant 0{,}02$ ***1 point***

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}9265^N\right) \leqslant \ln(0{,}02) \Leftrightarrow N \times \ln(0{,}9265) \leqslant \ln(0{,}02)$

$\Leftrightarrow N \geqslant \dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9265)}$ car $\ln(0{,}9265) < 0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}9265)} \approx 51{,}24$ donc $N = 52$.

Exercice 2 **(5 points)** **Thème : géométrie dans l'espace**

1. a. L'équation paramétrique de d_2 montre qu'elle passe par le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et qu'elle admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. ***0,25 point***

b. Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles. ***0,5 point***

c. Une représentation paramétrique de la droite d_1 est : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Il existe un point commun aux deux droites si et seulement s'il existe des réels k et t tels que : $\begin{cases} x = 2 + t = 2k - 3 \\ y = 3 - t = k \\ z = t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k = 2 + t + 3 = 10 \\ k = 3 - t = -2 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5 \\ k = -2 \\ t = 5 \end{cases}$ ***1 point***

Ce système n'admet pas de solution donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Les droites d_1 et d_2 n'étant ni sécantes ni parallèles, elles ne sont pas coplanaires ***0,5 point***

2. a. On a $\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = -1 - 2 + 3 = 0$

et $\vec{w} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = -2 + 2 = 0$ ***0,5 point***

donc le vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

b. Un point commun au plan P et à la droite d_2 a ses coordonnées qui s'écrivent sous la forme $(2k-3\ ;\ k\ ;\ 5)$ avec k un réel et qui vérifient l'équation cartésienne du plan P,

donc $5(2k-3)+4k-5-22=0 \Leftrightarrow 10k-15+4k-27=0$

$$\Leftrightarrow 14k-42=0 \Leftrightarrow k=3$$

1 point

Le point commun au plan P et à la droite d_2 a pour coordonnées $(2\times 3-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$ soit $\mathrm{M}(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$

3. a. Les droites Δ et d_1 ont leurs vecteurs directeurs $\vec{w}$ et à $\vec{u}$ orthogonaux donc ces droites sont orthogonales.

Ces deux droites sont sécantes s'il existe des réels t et r tels que que :

$$\begin{cases} x=2+t=-r+3 \\ y=3-t=2r+3 \\ z=t=3r+5 \end{cases}$$

1 point

La dernière équation $t=3r+5$ donne en remplaçant dans la deuxième :

$3-(3r+5)=2r+3 \Leftrightarrow 3-3r-5=2r+3 \Leftrightarrow -5=5r \Leftrightarrow r=-1$,

d'où $t=3\times(-1)+5=2$ et en remplaçant dans la première équation
on obtient $2+2=1+3$, égalité vraie.

Donc les droites Δ et d_1 sont sécantes au point $\mathrm{L}(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$

b. D'après la question précédente, les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires au point $\mathrm{L}(4\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et , d'après la question **2. b.**, les droites Δ et d_2 sont perpendiculaires au point $\mathrm{M}(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

0,25 point

Conclusion : on a trouvé une droite Δ perpendiculaire commune aux deux droites d_1 et d_2.

Exercice 3 **(5 points)** **Thème : fonction logarithme**

Partie A

1. D'une part, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X)=-\infty$, d'où par composition de limites : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x^2)=-\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$.

Donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$

0,75 point

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X)=+\infty$, d'où par composition de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2)=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$.

Donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2. La fonction $x\mapsto \ln(x^2)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=x^2$. Sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$ avec $u'(x)=2x$. Donc, pour tout réel $x>0$, $g'(x)=\dfrac{2x}{x^2}+1=\dfrac{2}{x}+1=\dfrac{2+x}{x}$.

0,75 point

Sur $]0\ ;+\infty[$, $x>0$ et $2+x>2>0$, donc $g'(x)>0$.

La fonction g est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

3. a. D'après les questions précédentes g est continue car dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et croit de moins l'infini à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un unique réel $\alpha \in]0\,;+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. *0,5 point*

b. La calculatrice donne :

$g(1)=-1$ et $g(2)\approx 1,4$, donc $1<\alpha<2$;

$g(1,3)\approx -0,175$ et $g(1,4)\approx 0,07$, donc $1,3<\alpha<1,4$; *0,25 point*

$g(1,37)\approx -0,0004$ et $g(1,38)\approx 0,02$, donc $1,37<\alpha<1,38$.

4. D'où le tableau de signe : *0,25 point*

x	0		α		$+\infty$
Signe de g	||	$-$	0	$+$	

Partie B

1. a. On a $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$,

donc par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)}{x}=-\infty$. *0,5 point*

De plus, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

b. Graphiquement, le résultat précédent montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$. *0,25 point*

2. On a $\dfrac{x-2}{x}=1-\dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=1$. *0,5 point*

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{1\times x-(x-2)\times 1}{x^2}\times\ln(x)+\frac{x-2}{x}\times\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-x+2}{x^2}\ln(x)+\frac{x-2}{x^2}=\frac{2\ln(x)+x-2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}.$$
0,5 point

4. Comme $x^2>0$ sur $]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle est celui de $g(x)$.

On a vu à la question **A. 4.** que : *0,25 point*

• sur l'intervalle $]0\,;\alpha[$, $g(x)<0$: la fonction f est donc décroissante sur $]0\,;\alpha[$;

• sur l'intervalle $]\alpha\,;+\infty[$, $g(x)>0$: la fonction f est donc croissante sur $]\alpha\,;\infty[$.

Partie C

$$d(x)=f(x)-\ln(x)=\frac{(x-2)}{x}\ln(x)-\ln(x)=\left(\frac{(x-2)}{x}-1\right)\ln(x)$$
$$=\left(\frac{x-2-x}{x}\right)\ln(x)=-\frac{2}{x}\ln(x).$$

La position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln est donnée par le signe de la fonction d.

Comme $x > 0$, le signe de $d(x)$ est celui du produit $-2\ln(x)$. **_0,5 point_**

On dresse un tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	$+$	0
Signe de d	$\Vert$	$+$	$-$	0

Conclusion : sur l'intervalle $]0\,;1[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe logarithme népérien et, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de la courbe logarithme népérien.

Exercice 4 **(5 points)** **Thème : suites, fonction exponentielle, algorithmique**

1. Affirmation : **Vraie**

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ car $n+1>0$

On a ainsi : $\dfrac{-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ **_1 point_**

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Affirmation : **Fausse**

Pour montrer qu'une affirmation est fausse, il suffit de donner un contre-exemple : **_1 point_**

Considérons la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

Cette suite est bornée par -1 et 1 mais elle n'est pas convergente

3. Affirmation : **Vraie**

Pour tout entier naturel n, $v_n > 0$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{e^{2(n+1)+1}}{e^{2n+1}} = e^{2n+3-(2n+1)} = e^{2n+3-2n-1} = e^2$. **_1 point_**

Ainsi $v_{n+1} = e^2 \times v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison e^2.

4. Affirmation : **Vraie** (par récurrence).

• <u>_Initialisation_</u> Pour $n = 0$, on a $a_0 = 2$ et $4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 4 - 2 \times 1 = 2$.

La propriété est vérifiée au rang 0.

• <u>_Hérédité_</u> On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \geqslant 0$: $a_n = 4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$;

alors $a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) + \dfrac{8}{3} = \dfrac{4}{3} - 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{8}{3} = \dfrac{12}{3} - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1+n}$ **_1 point_**

$= 4 - 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

• <u>_Conclusion_</u> La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$;
d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$

5. Affirmation : **Faux** **_1 point_**

On initialise S à 0, puis l'algorithme va calculer la somme S de tous les termes de la liste L et finalement renvoyer le quotient de S par l'effectif des valeurs.

Cet algorithme donne donc la moyenne des valeurs de la liste, soit $\frac{50}{10} = 5$.