BACCALAURÉAT BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Mardi 16 avril 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisée

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.
Les traces de recherche, mêmes incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante. On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

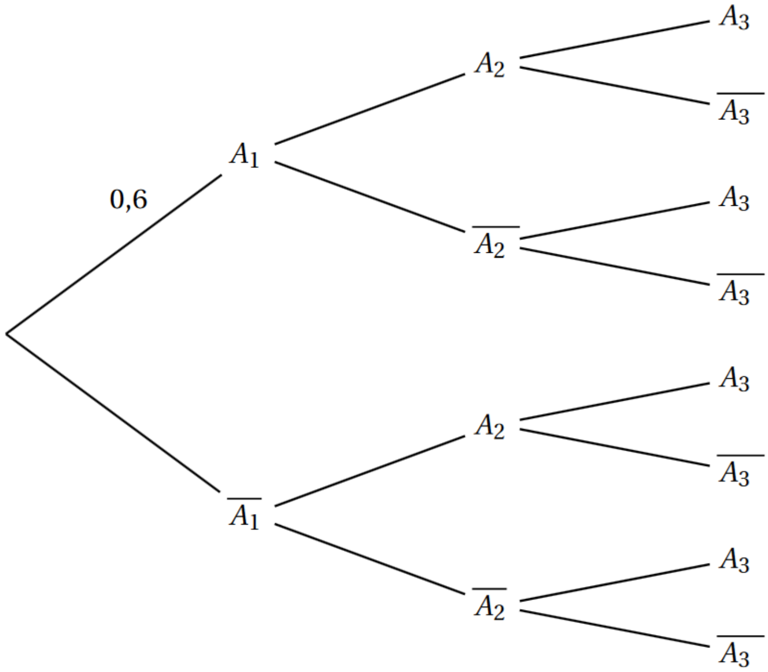
Pour tout évènement A, on note $p(A)$ *sa probabilité et* $\overline{A}$ *l'évènement contraire de A.*

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1er tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-contre modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,401 5.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,1			0,073 5

b. Calculer $E(X)$.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.

Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.

On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

2. Par la méthode de votre choix, que vous expliciterez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère :

- d_1 la droite passant par le point $\mathrm{H}(2 ; 3 ; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2k - 3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.

b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. a. Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et à $\vec{w}$.

On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $\mathrm{M}(3 ; 3 ; 5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M.

Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par : $\begin{cases} x = -r + 3 \\ y = 2r + 3 \\ z = 3r + 5 \end{cases}$ où r décrit $\mathbb{R}$.

a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.

b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

Exercice 3 **(5 points)**

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. a. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x) .$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Exercice 4 **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge vers 0.

2. Affirmation : Toute suite bornée est convergente.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \mathrm{e}^{2n+1}$.

Affirmation : La suite (v_n) est géométrique de raison e^2 .

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$$a_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \; a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$$

Affirmation : Pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 4 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.
On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste `L`.

```
def mystere(L):
    S = 0
    for i in range(len(L)):
        S = S + L[i]
    return S/len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([1, 9, 9, 5, 0, 3, 6, 12, 0, 5])` renvoie `50`.